தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை—49

புள்ளியியல் - அறிமுகம்

INTRODUCTION TO STATISTICS

ஆசிரியர்
க. வைத்தியநாதன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
(Diploma in Statistics)
கணித உதவி விரிவுரையாளர்
அரசினர் கலைக் கல்லூரி, கோவை

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழ்நாடு - அரசாங்கம்

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை—49

புள்ளியியல் - அறிமுகம்

INTRODUCTION TO STATISTICS

ஆசிரியர்

சு. வைத்தியநாதன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
(Diplcma in Statistics)
கணித உதவி விரிவுரையாளர்
அரசினர் கலைக் கல்லூரி, கோவை

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழ்நாடு - அரசாங்கம்

First Edition - April, 1964.

B.T.P. No. 49.

INTRODUCTION TO STATISTICS

S. VAIDYANATHAN

© Bureau of Tamil Publications

Price Rs. 10/-

Printed by
Muthukumaran Press,
14-A, Kuppier Street, Madras-1.

அணிந்துரை

(திரு. எம். பக்தவத்ஸலம், தமிழக முதலமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி நான்கு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பீ.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வருகின்றனர். தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே திருப்திகரமாக நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **புள்ளியியல் - அறிமுகம்** என்ற இந்நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 49ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 84 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலையாசனத்தில் அமர்ந்துள்ளாள். எனவே, இவ்வன்னையை வாழ்த்துவோமாக! உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

எம். பக்தவத்ஸலம்

முன்னுரை

சென்னைப் பல்கலைக் கழக பீ. ஏ. கலைத் துறையினில் புள்ளியியலைத் துணைப்பாடமாகக் (Ancillary) கொண்ட மாணவர்கட்குப் பயன்படுமாறு இந் நூல் இயற்றப் பெற்றுள்ளது. புள்ளியியலைத் தமிழில் எழுத எழுந்த ஆர்வத்தின் முதல் முயற்சியாதலின், முற்றுப்பெற்று எல்லா வகையாலும் சிறப்புப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறுவதற்கில்லை. எனினும், புள்ளியியலுக்குரிய கருத்துகளை மாணவர்கள் படித்து அறியக் கூடிய எளிய தமிழ்நடையில் இந்நூல் இயற்றப் பெற்றுள்ளது. இந் நூலை மேலும் சிறந்த முறையில் மாற்றியமைக்கக் கூறப்படும் அரிய கருத்துகள் நன்றியோடும் உவகையோடும் ஏற்றுக்கொள்ளப் படும்.

இந் நூலை உருவாக்க என்னுடன் பணிபுரியும் பேராசிரிய நண்பர்கள் பெரிதும் என்னை ஊக்குவித்தனர். அவர்கட்கு என் நன்றி.

கோவை,
நவம்பர், 63

சு. வைத்தியநாதன்

உள்ளுறை

1. அறிமுக உரை 1

புள்ளியியலின் நோக்கங்கள்—புள்ளியியலின் குறைபாடுகள்—புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதி—பேரினங்களின் மாருப் பொதுமை.

2. புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல் 11

முதனிலைக் கருத்துகள்—முதனிலை விவரங்கள்—இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்—முதனிலை விவரங்களைச் சேகரிக்கும் வகைகள்.

3. புள்ளி விவரங்களை அறிமுகப்படுத்துதலின் வகைகள் 16

பாகுபடு—தனித்த மாறிகள், தொடர் மாறிகள்—அலைவுப் பரவல்—பிரிவு இடைவெளிகளின் அமைப்புகள்.

4. வரைபட விளக்கப்பட மூலம் புள்ளி விவரங்களை விளக்குதல் 29

சித்திர விளக்கப்படங்கள்—வட்ட விளக்கப்படம்—பட்டை விளக்கப்படம்—கூட்டுப்பட்டை விளக்கப்படம்—சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம்—அலைவெண் பரவலின் வரைபட விளக்கம்—அலைவெண் கோட்டு விளக்கப்படம்—அலைவெண் செவ்வகப்படம்—அலைவுப் பலகோணம்—அலைவெண் வளைகோடு—குவிவு அல்லது திரள் அலைவெண் பரவல்—'ஒகைவ்' வளைவு கோடுகள்.

5. சராசரிகள் 50

சராசரியின் உபயோகங்கள்—சராசரிக்குரிய பண்புகள்—குறியீடு சராசரியின் வகைகள்—கூட்டுச் சராசரி அல்லது கூட்டிடை—அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி—கூட்டிடைகளின் கூட்டிடை—இடைநிலை—அலைவெண் பரவலின் இடைநிலை — முகடு — அலைவெண் பரவலின் முகடு—ஜியோமிதி மூலம் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவைகளை விளக்குதல்—கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை இவற்றை ஒப்பிடுதல்—இடைநிலை முகடு இவற்றை ஒப்பிடுதல்—பெருக்கிடை—அலைவெண் பரவலின் பெருக்கிடை—பெருக்கிடையின் இயல்புகள்—ஹார்மானிக் சராசரி.

6. சிதறல் 90

சிதறல் அளவுகோல்கள்—வீச்சு—கால்மான விலக்கம்—பத்துமானம்—நூற்றுமானம்—சராசரி விலக்கம்—கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்—திட்ட விலக்கம்—திட்ட விலக்கத்தின் பண்புகள்—சிதறல் கெழுக்கள்—மாற்றக்கெழு.

7. கோட்டம் 120

பியர்சனின் கோட்டக் கெழு—கால்மானக் கோட்டக் கெழு.

8. உடன் தொடர்பு 126

நேரிடை உடன் தொடர்பு—எதிரிடை உடன் தொடர்பு—சிதறல் விளக்கப்படம் — உடன் தொடர்புக்கெழு —ரெக்ரெஷன் கோடுகள்—தொடர்புக் கெழுக்கள்—உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பயன்கள்—உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பொருள் விளக்கம்—தொடர்புக் (ரெக்ரெஷன்) கோடுகளின் பயன்கள்—ரெக்ரெஷன் கோடுகளை வரையும் விதம்—மதிப்புத்தரத் தொடர்புக்கெழு.

9. பண்புகளின் கூட்டுறவு 157

கூட்டுறவு—குறியீடு—பண்பு அலைவெண்களின் அமைப்பு முறை - பண்புகளின் அறிகுறிச் சமன்பாடுகள்—பண்புகளின் சார்பு, சார்பிலாத் தன்மையை அலைவெண் குறியீடு மூலம் விளக்குதல்—பண்புக்கெழு அல்லது பண்புக் கூட்டுறவுக் கெழு—ஒரு தலையான கூட்டுறவு—'XXY' இணைப்பட்டியல்—இணைப்புக்கெழு.

10. வாய்ப்பின் நியதிகள் 179

ஊக அளவை—சரிநிகரான நிகழ்ச்சிகள்—ஒன்றை ஒன்று விலக்கிடும் தன்மைபெற்ற நிகழ்ச்சிகள்—கணக்கியல் ஊக அளவை—புள்ளியியல் ஊக அளவை—ஊக அளவையின் கூட்டு நியதி—சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்—ஊக அளவையின் பெருக்கு நியதி—உறுப்புமாற்றுக் கோவைகளும், கூட்டு மாற்றுக் கோவைகளும்.

11. ஈருறுப்புப் பரவல் 192

12. இயல்நிலைப் பரவல் 205

இப் பரவலின் அமைப்பு—இயல்நிலை வளைகோடு—இயல் நிலை ஊக அளவை வளைகோடு—நிலைக்கோடு, பரப்பு—

இவைகளைத் தெரிவிக்கும் சிறப்புப் பட்டியலின் அமைப்பு இயல்நிலை வளைகோட்டினுள் வரும் பரப்புகளைக் கணக்கிடல்—யூகப்பிழை—இயல்நிலை வளைகோட்டின் தனிப்பட்ட சில சிறப்புக் குணங்கள்—ஒரு மாறியின் ஒழுங்கு அலைவெண் வளைகோட்டின் சில சிறந்த பண்புகள்—இயல்நிலை வளைகோட்டைச் செயல் முறையில் பொருத்துதல்—இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவம்.

13. புள்ளியியலில் வரும் முழுமைத் தொகுதிகளின் கருத்துகள் 234

பொதுக்கொள்கைகள்—முழுக்கணிப்பு முறையும் மாதிரித் தேர்வு முறையும்—மாதிரிக் கூறின் அவசியம்—மாதிரிக் கூறின் நோக்கங்கள்—மாதிரிக்கூறு தேர்வு முறையின் வகைகள்—ராண்டம் மாதிரிக் கூறு—ராண்டம் மாதிரிக் கூறின் தேர்வு முறை—ராண்டம் மாதிரிக் கூறுகளின் பிழை விளக்கம்—ராண்டம் மாதிரிக் கூறின் பிழைகள்—ராண்டம் மாதிரிகளின் செயல் நுட்பம் ஒழுங்குமுறை மாதிரிக் கூறு—படுகை மாதிரிக்கூறு—பல நிலை மாதிரிக்கூறு—படிப்படி மாதிரிக்கூறு—மறுக்கத்தகு எடுகோளும், அதன் சோதனையும்—மதிப்பிடுதலும் நம்பிக்கை இடைவெளியும்—மாதிரிக் கூறின் குறைகள்—மாதிரிக்கூறின் அளவெடுப்புகள்.

14. மாதிரிக் கூறின் பரவல்கள் 252

மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரியின் பரவலமைப்பு—திட்டப் பிழைகள்—மாறியின் நம்பிக்கை எல்லைகள்—கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை இடைவெளி—திட்டவிலக்கத்தின் நம்பிக்கை இடைவெளி—சில சிறப்புக் காணும் சோதனைகள்—உறுப்பு மதிப்புக்கும் கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் அதன் மதிப்பிற்குமுள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்—மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும், முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச்சராசரிக்குமுள்ள வேற்றுமையை ஆய்தல்—இரு மாதிரிகளுக்குமுள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்—நேரிடையாகக் கண்ட விகிதத்திற்கும், முழுமைத் தொகுதியில் வரும் விகிதத்திற்குமுள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்—இரு விகிதங்களுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்.

15. அளவுக் குறியீட்டெண்கள் 271

குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்—சார்பிகளும், விலைச் சார்பிகளும்—குறியீட்டெண்—எளிய முறைப்படித் தொகுத்த

விலைச் சார்புக் குறியீட்டெண்கள்—எடையிட்ட குறியீட்டெண்கள்—லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண்—பாஷேயின் குறியீட்டெண் — பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் — குறியீட்டெண்களுக்குரிய பண்புகள் - பொருள் திருப்புச் சோதனை—காலத் திருப்புச் சோதனை—விலை, அளவு திருப்புச் சோதனை—குறியீட்டெண்ணைத் தொகுப்பதில் கவனிக்க வேண்டிய பிரச்சினைகள்—குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்தலின் நோக்கம்—பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்—பொருள்களின் விலைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்—அடிப்படைக் காலத்தை வரையறுத்தல்—ஏற்ற சராசரிகளைப் பயன்படுத்தல்—எடைகளையெடுத்தல்—வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள்—உழைப்பாளி வகுப்பினருக்கான வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைத் தொகுக்கும் முறை—வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்—வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களின் வகைகள்—சென்னை நகரத்திற்குரிய வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள்.

16. காலத் தொடர் வரிசை 308

காலத் தொடர் வரிசையின் போக்குகள்—பொதுவான போக்கு—சுழற்சியாக வரும் நிகழ்ச்சிகளின் போக்கு—பருவகாலத்திற்குரிய போக்கு—ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளின் போக்கு—பொதுவான போக்கை அளவிடுதல்—வரைபட மூலம் வரையறுத்தல்—நகரும் சராசரியின் மூலம் விளக்குதல்—நகரும் சராசரிகளின் தனிப்பட்ட இயல்புகள்—குறைந்த வர்க்க முறையைக் கொண்டு நேர்கோட்டு சம்பந்தமான போக்கை வரையறுத்தல் — காம்பெர்ட்சின் வளைகோடு—லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு.

17. மக்கட் கணிப்பு 334

மக்கட் கணக்கெடுப்பின் முக்கியத்துவம்—இந்தியாவில் மக்கட்கணிப்பு — மக்கட்கணிப் பெடுத்தலின் முறை — மக்கட் கணிப்பின் அமைப்பு முறை—1931ஆம் ஆண்டு இந்திய மக்கட்கணிப்பு — 1941ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பு—1951ஆம் ஆண்டு மக்கட்கணிப்பு—1951ஆம் ஆண்டு மக்கட்கணிப்பின் வாயிலாக அறிந்த விவரங்கள்—1961ஆம் ஆண்டு மக்கட்கணிப்பு—மக்கட்கணிப்பின் குறைபாடுகள்.

1. அறிமுகவுரை

தினசரி வாழ்க்கையில் ஏற்படும் நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் எண்ணிக்கையுடனும் அளவிடுவதனுடனும் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. மனிதன் பிறந்ததும் கணக்கெடுக்கப்படுகிறான்; அவன் இவ்வுலகை விட்டுப் பிரியும்போதும் கணக்கெடுக்கப்படுகிறான். அங்ஙனம் பிறப்பு, இறப்பு நிகழ்ச்சிகளின் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து வைத்திருக்காவிட்டால் நம்மால் காந்தியடிகளின் பிறந்த, இறந்த தேதிகளை அறிய முடியாமற்போயிருக்கக்கூடும். இயற்கை நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் அறிவுத் துறைகளில் ஒழுங்கு நியதிக்குக் (Normal law) கட்டுப்பட்டுத்தான் இயங்குகின்றன என்பதை நாம் எண்ணுவது, அளவிடுவது ஆகியவற்றின்மூலம் அறிந்துகொள்கிறோம். வள்ளுவப் பெரியாரும்,

‘எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழு முயிர்க்கு’

என்று எண்ணிக்கைக்கு முதலிடம் அளித்துள்ளார். கெல்வின் (Lord Kelvin) என்ற பெரியார் அறிவைப்பற்றிக் கூறும்பொழுது சொல்வதாவது:

‘When you can measure what you are speaking about and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind.’

பழங்கால மன்னர்களுங்கூடத் தங்கள் நாட்டை அந்நியர்களிடமிருந்து காப்பதற்காகவும், வரி விதிப்பதற்காகவும், நாட்டின் மக்கட்தொகை, செல்வநிலை ஆகியவைபற்றியும் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து வந்துள்ளனர். ஆனால், அவர்கள் கையாண்ட முறை ஒழுங்கற்றதாகவும் தொடர்ச்சியற்றதாகவுமிருந்ததுடன், புள்ளி விவரங்

களையும் வாய்மொழியாகவே (verbal) கேட்டறிந்தனர். அக் காலங்களில் அரசியல் துறைகளில்மட்டுமே புள்ளி விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டன.

ஏறக்குறைய இரண்டு நூற்றுண்டுகளுக்கு முன்புதான் 'புள்ளி இயல்' ஓர் அறிவுத் துறையாகக் (Science) கருதப்பட்டது. 19ஆம் நூற்றுண்டின் துவக்கத்தில், மேற்குஐரோப்பிய நாடுகளில் கல்வியின் மறுமலர்ச்சியாலும் சமூகச் சீர்திருத்த இயக்கங்களாலும் விஞ்ஞானம், வணிகம், பொருளாதாரம் முதலிய துறைகளில் முன்னேற்றம் ஏற்பட்டன. ஆகையால், இவைகளைப்பற்றி அறிய ஓர் ஒழுங்கான முழுக் கணிப்பு விவரம் எடுக்கவேண்டிய நிலைமை ஏற்பட்டது. அதன்பின், அரசாங்கப் புள்ளி விவரங்கள் தொடர்ச்சியாகவும் எண்ணிக்கையை அடிப்படையாகக்கொண்டும் சேகரிக்கப்பட்டதால், வாய்மொழியாகக் கேட்டறியும் முறை கைவிடப்பட்டது. மேற்கு வல்லரசு நாடுகள் தொழில், வணிகத் துறைகளில் விரிவடைதலை எண்ணிக்கை அளவெடுப்புகள்மூலம் வெளியிடுவதில் முயற்சி எடுத்துக்கொண்டன. மக்களின் நலனைக் கருதிச் சீர்திருத்த மசோதாக்கள் கொண்டுவருவதற்காகச் சில விசாரணைகளை (enquiries) அரசாங்கத்தார் ஏற்படுத்தினர். அரசாங்கத்தார் வரி வசூல் செய்வது, படை திரட்டுவது, வணிகத் துறைகளின் வளர்ச்சி ஆகியவற்றில் மட்டுமன்றி, மக்களின் தினசரி வாழ்க்கையில் ஏற்படக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் உண்மையான நிலையை அறிய, விவரங்களை எண்ணிக்கையிட்டோ அல்லது அளந்தோ சேகரிக்கத் தொடங்கினர். கைத்தொழில், இயந்திரத் தொழில் ஆகியவற்றைப் பெருக்குவதிலும், மக்களின் பிறப்பு, இறப்பு வீதங்களைக் கணக்கிடுவதிலும், சுகாதார வசதிகளை ஏற்படுத்துவதிலும் புள்ளி விவரங்கள் எண்ணிக்கையின் வாயிலாகவே சேகரிக்கப்பட்டன.

அறிவுத் துறைகளில் அளவின் விவரங்களைத் தொகுத்தே இயற்கையின் நியதிகளை அறிய முடியும். விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் எண்ணிக்கைக்கு முதலிடம் அளிக்கப்பட்டிருப்பதால், பௌலி (Bowley) என்பவர், புள்ளியியலை 'எண்ணிக்கையிடும் அறிவுத் துறை' (Science of counting) என்று கூறுகிறார். ஆனால், இக் கூற்றில் புள்ளியியலுக்குரிய பாகுபாடு செய்வது, அட்டவணையிலிடுவது, ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பது, மதிப்பீடு செய்வது ஆகியவற்றிற்கு இடமளிக்கப்படவில்லை.

புள்ளியியல் முறை என்பதாவது விவரங்களை ஒழுங்காகச் சேகரித்து, அதைப் பாகுபடுத்தி, அட்டவணையிலிட்டு, வரைபடம் மூலம் விளக்கி, அதிலிருந்து கிடைக்கக்கூடிய உண்மைகளை அடிப்படை

யாகக்கொண்டு, முன்கூட்டியே வருங்காலத்தின் செய்திகளை அறிவிக்கும் அறிவுத் துறையேயாகும்.

புள்ளியியலை, சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு அறிவிக்கும் அறிவுத் துறை (Statistics can be regarded as the science of averages) என்று கூறலாம். அளவின் விவரங்களைச் சுருக்கமாக வெளியிட்டால் தான், ஒரு சாதாரண மனிதன் விவரங்களின் பொதுப்படையான தன்மைகளை அறியமுடியும். இதில் சராசரி அளவைகள் மிகவும் பயன்படுகின்றன. சராசரிகள் உறுப்புகளின் ஏற்றத் தாழ்வு அளவுகளைச் சமன்படுத்தி, முழுமைத் தொகுதியின் மையநிலைப் போக்கை வெளிப்படுத்துகின்றன. அம் மாதிரியே உறுப்புகளின் வித்தியாச அளவுகளை நாம் சில சிதறல் அளவைகளைக் கொண்டும், உறுப்புகளின் தன்மைகளுக்குள்ள உறவை, உடன் தொடர்புக் கெழுக்கள் மூலமும் கண்டறிகிறோம். புள்ளியியல் முறையானது மேற்சொன்ன அளவுகோல்களை நிர்ணயித்து, புள்ளி விவரங்களைச் சுருக்கி முறைப் படுத்திக் கூறுவதால், அதைச் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு அறிவிக்கும் அறிவுத் துறை என்று பௌலி (Bowley) கூறுகிறார்.

சராசரி அளவைகள், ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பொதுப்படையான கருத்துகளை விவரிக்கின்றனவே தவிர, ஒவ்வொரு உறுப்பின் தனிப்பட்ட கருத்துகளுக்கு இடமளிப்பதில்லை.

பல்வேறு காரணங்களால் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் பாதிக்கப் பட்டுச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை விளக்கிக் கூறும் அறிவுத் துறையே புள்ளியியல் என்று யூல் (Yule) என்பவர் கூறுகிறார். சமூக அறிவுத் துறையைவிடத் தூய்மையான அறிவுத் துறைகளுக்குள்ள தனிச் சிறப்புக் குணத்தை இக் கூற்று வெளிப்படுத்துகிறது. இயற்கையில் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் பல்வேறு காரணங்களால் பாதிக்கப்பட்டு இயங்குகின்றன.

தூய்மையான அறிவுத் துறைகளில்—பௌதீகம், இரசாயனம் கணிதம் முதலியன—ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்குரிய காரணங்களைக் கட்டுப்படுத்திப் பரிசோதனைகள் நடத்த முடியும். ஒரு பரிசோதனைச்சாலையில் அட்வூட் எந்திரத்தைக் (Atwood's Machine) கொண்டு புவி ஈர்ப்பு ஆற்றலின் முடுக்கத்தைக் (acceleration due to gravity) கணக்கிட முடியும். இப் பரிசோதனையில் பொறியில் அமையும் சக்கரத்துக்கும் அச்சுக்கும் இடையில் ஏற்படும் உராயும் விசையைக் (force of friction) கூடியவரையில் குறைக்க முடியும். மேலும், முடுக்கத்தை நிலையான அளவுள்ளதென்று நிரூபிக்கப் பரிசோதனையைப் பலதடவைகள் செய்யவும் கூடும்.

ஆனால், சமூகத் துறைகளில் நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய எல்லாக் காரணங்களையும் கட்டுப்படுத்த முடியாது. உதாரணமாக ஒரு மனிதனின் உயரம், அவனுடைய இனம், பரம்பரை, இருப்பிடம், இளமையில் உண்ட உணவு, அவன் வயது, தொழில், தேகப்பயிற்சி செய்தல், வாழ்க்கைப் படித்தரம் முதலிய காரணங்களைப் பொறுத்திருக்கிறது. இவைகளைத் தவிர, நம் அறிவுக்கு எட்டாத சில காரணங்களாலும் பாதிக்கப்பட்டிருக்கலாம். இவற்றில் சில, மனிதனின் கட்டுப்பாடின்றித் தானாகவே இயங்கக் கூடியவை. நடைமுறையில் சில நிகழ்ச்சிகள் காரணவிளைவுத் தொடர்பையொட்டி நிகழ்கின்றன. சில நிகழ்ச்சிகள் காரணவிளைவுத் தொடர்புக்கு மாறுபட்டும் நிகழ்கின்றன. வேளாண்மைத் துறைகளில், ஒரு தானியத்தின் விளைச்சல், நீர்ப்பாசன வசதிகள், சீதோஷ்ண நிலை, மழையளவு, மண்ணின் தரம், உரத்தின் அளவு, தன்மை ஆகிய பல்வேறு காரணங்களையும் பொறுத்திருக்கிறது. இவைகளில் சீதோஷ்ண நிலை, மழையளவு ஆகியவை கட்டுப்பாடின்றித் தானாகவே இயங்கக் கூடியவை. நீர்ப்பாசன வசதிகளையும் உரத்தின் அளவையும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்குமேல் உபயோகித்தாலும் விளைச்சலின் அளவை அதிகரிக்க முடியாது. இக் காரணங்களெல்லாம் ஒரே சமயத்தில் ஏற்படுவதால், நம்மால் ஒவ்வொரு காரணத்திற்குரிய விளைவைப்பற்றி ஆராய்ச்சி செய்யுமளவுக்குச் சூழ்நிலைகளை ஏற்படுத்த முடியாது.

நடைமுறைச் சிக்கல்களில் மனித வர்க்கத்தைப் பரிசோதனைக்குட்படுத்த சமூகம் எல்லாச் சமயங்களிலும் இடமளிக்காது. மேலும், சமூக ஆராய்ச்சிகளில் மாதிரிகளைத் (samples) தேர்ந்தெடுக்கும் முறைகள் மிகவும் சிக்கலானவை. ஆதலால், சமூக ஆராய்ச்சியாளர் தன் கட்டுப்பாட்டுக் கிணங்காத நிகழ்ச்சிகள் அவைகளாகவே ஏற்படும் வரையில் பொறுத்திருந்து விவரங்களைச் சேகரிக்கவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. இங்ஙனம் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைத்தான் புள்ளியியல் ஏற்று, முறைப்படுத்தி, அவைகளின் பொதுவான குணங்களை வெளிப்படுத்துகிறது.

தூய்மையான அறிவுத் துறைகளில் ஒரு பரிசோதனையானது, பல்வேறு காரணச் சிக்கல்களில் ஒரு காரணத்திற்குமட்டும் சிறப்பளித்து, அது மற்றக்காரணங்களால் பாதிக்காவண்ணம் சூழ்நிலையை அமைத்துக் கூடுமானவரையில் அக் காரணத்தால் ஏற்படும் விளைவை அறிய முயலுகிறது. இம் மாதிரியான வசதிகள் சமூக ஆராய்ச்சித் துறைகளில் இல்லாத காரணத்தால், புள்ளியியல் பல்வேறு காரணங்களால் வசப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் புள்ளி விவரங்களை ஆராய்ச்சி

செய்வதற்காக ஏற்றுப் பொதுவாக எந்தெந்தக் காரணங்கள் முக்கிய மானவைகளோ அவைகள் ஒவ்வொன்ருலும் ஏற்படும் விளைவை அறியப் பயன்படுகிறது.

சாதாரணமாக ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் குணங்களைப்பற்றி அறிவதற்கு அதிலடங்கிய ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பரிசீலனை செய்து ஒரு முடிவுக்குவர இயலாது. மேலும், முழுப் புள்ளி விவரம் எல்லா ஆராய்ச்சிகளிலும் தேவையில்லை. தவிரவும், முழுப் புள்ளி விவரம் எடுக்க அரசாங்கத்திற்கு அதிகப் பணச் செலவும் கால தாமதமும் ஏற்படுகிறது. ஆதலால், அரசாங்கத்தார் மக்கள் மதிப் பீட்டைத் தவிர, மற்ற எல்லா விசாரணைகளிலும் மாதிரித் தேர்வுகள் மூலம்தான் முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி அறிகிருர்கள். ஒரு முழு மைத் தொகுதியைப்பற்றிய விவரங்களை அதிலிருந்து தேர்ந்தெடுக் கப்பட்ட ஒரு மாதிரியின்மூலம் அறியலாம் என்று எல்லோரும் தமது அனுபவத்தாலும் பகுத்தறிவாலும் நினைப்பது இயல்பு. 'ஒரு பானைச் சோற்றுக்கு ஒரு சோறு பதம்' என்ற பழ மொழியே இதற்குச் சான்ருகும். ஒரு தானிய வியாபாரியால் தானி யக் குவியல்களின் தரத்தை, மாதிரித் தேர்வுகளிலடங்கிய பொருள் களின் தரத்தைக்கொண்டு ஆராய முடிகிறது. ஏனெனில், மாதிரி யானது முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றிய முழு விவரத்தைத் தெரி விக்கும் என்பது நம் அனுபவமேயாகும்.

ஒரு மாதிரி, ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு பொருத்த மான முறையைக் கையாண்டு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒருசில உறுப் புகளாலானது. அம் மாதிரியிலடங்கிய உறுப்புகளின் தரத்தைப் புள்ளியியல்மூலம் கண்டறியலாம். மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கக் கூடிய உண்மைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு, முழுமைத் தொகுதி யின் தன்மையை மதிப்பீடு செய்யலாம். இவ்வாருக மாதிரியிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி அறிவதற்குப் புள்ளியியல் கருத்து முறை (statistical reasoning) தொகுத்தறி முறையைக் (inductive process) கடைப்பிடிக்கிறது. ஆதலால், புள்ளியியலைக் கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்து (observational data) 'தொகுத்தறிவிக்கும் அறிவுத்துறை' என்று கூறலாம் (Statistics can be regarded as the science of inductive reasoning from observed numerical facts).

தொகுத்தறி முறையில் சில இடையூறுகளும் உள்ளன. மாதிரி களிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை வரையறுக்கப்பட்டிருப் பதால், அவைகளைக் கொண்டு கிடைக்கும் விவரங்களும் வரம்புக்குட் பட்டவைகளே. ஆதலால், மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கக்கூடிய

உண்மைகள் (observed facts), முழுமைத் தொகுதியின் தூய்மையான உண்மைகளை (true population facts) முற்றிலும் விவரிக்கும் என எதிர்பார்க்க முடியாது. எனவே, புள்ளியியலில் நாம் சில சிறப்பான சோதனைகள்மூலம் (tests of significance) மாதிரிகள் முழுமைத் தொகுதியை மதிப்பீடு செய்கிறதா அல்லவா என்று கண்டறிகிறோம். எனவே, மேற்கூறப்பட்ட பல்வகைக் கருத்துகள் அடங்கிய வெவ்வேறு கூற்றுகளைப் புள்ளியியல் என்ன என்பதை முற்றிலும் விளக்கிய கூற்றுகளாகக் கொள்ள முடியாது.

புள்ளியியலின் நோக்கங்கள்

(1) எல்லா அறிவுத் துறைகளிலிருந்தும் கிடைக்கும் விவரங்களை விளக்குவதே இதன் முக்கிய நோக்கமாகும்.

(2) ஒரு முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி குறைந்த செலவில் குறுகிய காலத்தில் அறிவிக்கிறது.

(3) ஒரு நாட்டின் பொருளாதார, வர்த்தக, சுகாதார முன்னேற்றத்தை எண்கள்மூலம் அளவிட்டு வெளிப்படுத்துகிறது.

(4) நடுநிலைமை வகித்துச் செய்திகளைத் தெளிவாக விவரித்துத் தீர்ப்பளிக்கிறது.

(5) காரண, விளைவுகளுக்குள்ள தொடர்பை முறைப்படுத்துகிறது.

(6) நிகழ்கால, இறந்தகால நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டு எதிர்காலத்தில் நிகழக்கூடிய செய்திகளை முன்கூட்டியே அறிவிக்கிறது.

(7) மாதிரிகளிலிருந்து கிடைக்கக்கூடிய உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளை மதிப்பீடு செய்கிறது.

(8) கண்களுக்குப் புலப்படாத விண்மீன்களை எவ்வாறு தொலைநோக்கிமூலம் கண்டு அறிய முடிகிறதோ, அவ்வாறே சமூகத் துறைகளில் ஏற்படும் சிக்கலான செய்திகளைத் தெளிவுபடுத்தப் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

(9) அனுபவத்தால் உண்டாகும் திறமையை விரிவுபடுத்திக் கொள்ளப் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

புள்ளியியலில் குறைபாடுகள்

1. புள்ளியியல், ஒரு சிக்கலைப்பற்றி எண்ணுவதன்மூலமோ அளவிடுவதன்மூலமோதான் கூறுகிறது. ஆனால், சமூகத் துறைகளில் அநேகச் சிக்கல்கள் அளவிட முடியாதனவாக இருக்கின்றன. உதாரணமாக, ஒரு நாட்டின் ஏழ்மைத்தனத்தை அளவுகோலைக் கொண்டு அளவிட்டுக் கூற முடியாது.

2. புள்ளியியல் ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பொதுவான கருத்தைத் தெரிவிக்கிறதேயன்றி, தனிப்பட்ட ஒவ்வொரு உறுப்பின் கருத்துக்கும் இடமளிப்பதில்லை.

3. புள்ளி விவரங்களைமட்டுமே அடிப்படையாகக் கொண்டு சமூகத்தின் சிக்கலான சிக்கல்களைத் தீர்க்க முடியாது. ஏனெனில், மனிதர்கள் இனம், பொருளாதாரம், அரசியல், மதம் ஆகிய துறைகளில் வேறுபட்டிருக்கிறார்கள்.

4. புள்ளியியல், விசாரணை, நிகழ்காலத்தையும் இறந்த காலத்தையும்பற்றிக் கூறுகிறது. ஆனால், எதிர் காலத்தைக் குறித்து மதிப்பீடுதான் செய்ய முடியும்.

5. புள்ளியியல் சமூகத்தைச்சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளைப் புறவியலாகத் தெரிவிக்கும் நோக்கமுடையது. இருந்தபோதிலும் ஒருபுறச் சாய்வை விலக்காமல் சேகரித்த விவரங்களைக்கொண்டு கிடைக்கும் செய்திகள் நம்பத்தக்கவையல்ல.

6. நெறியற்றவர்கள் கையிலும் வெறியார்வமுள்ளவர்கள் கையிலும் புள்ளி விவரங்கள் தீமை விளைவிக்கும் சாதனங்களாக அமைகின்றன.

7. புள்ளி விவரங்களின் தோற்றுவாயிலும் (source) சில குறைகள் இருக்கலாம்.

8. புள்ளியியல் முறைகளைத் தவறான வழிகளிலும் பயன்படுத்தலாம்.

புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதி
(Law of Statistical Regularity)

புள்ளியியல் விசாரணைகள், உறுப்புகளின் பல பண்புகளை ஆராய முற்படுகின்றன. அவ்வாராய்ச்சிகளில், புள்ளியியல்

குறிப்பாக முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றிப் பொதுவான கருத்துகளை விளக்குகிறதே தவிர, குறிப்பிட்ட உறுப்புகளைப்பற்றி விளக்கம் தருகிறதில்லை. ஆகவே, ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலடங்கிய ஒவ்வொரு உறுப்பின் சிறப்புக் குணமும் பொதுத் தன்மையைப் பெறுகின்றது என்று கூறலாம். இதை ஆங்கிலத்தில், 'In the population, the individuals merge and their individuality is dissolved, but from the dissolution rises a new entity' என்று கூறுகிறோம். அதாவது ஒரு முழுமைத் தொகுதியில், உறுப்புகளின் தனிப் பண்புகள் மறைந்து, அவைகளினின்றும் ஒரு பொதுப் பண்பு உருவாக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, ஒரு நாட்டு மக்களின் இறப்பு வீதம், அந் நாட்டிலுள்ள மக்களை இனவாரியாகவும், இருப்பிடத்திற்குத் தகுந்தவாறும், சமூக நிலைக்கு (social status) ஏற்றவாறும் பிரிக்கப்பட்டுக் கணக்கிடப்படுகிறது. ஆனால், ஒவ்வொரு மனிதனின் இறப்பு வீதத்தையும் காண்பதில் பயனில்லை. அம் மாதிரியே ஒரு நாட்டின் பிறப்பு வீதத்தை நாம் திருமணத்தின்போது மணமக்களின் வயது, வருமானம், குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை, அவர்களின் முன்னோர்களது பிறப்பு வீதம் முதலியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டுதான் பொதுவாக மதிப்பிடுகிறோம்.

இயற்கையிலும் வாழ்க்கையிலும் ஏற்படக்கூடிய எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் வியக்கத்தக்கவாறு ஒழுங்காக நிகழ்கின்றன. உதாரணமாக, மானிட வாழ்க்கை நிலையற்றதாதலால், ஒரு மனிதன் எப்பொழுது இறப்பான் என்று கூற முடியாது. ஆனால், ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் இவ்வளவு பேர் இறப்பார்கள் என்று ஓரளவு ஊகமாகக் கூற முடியும். சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஆராயும்பொழுது அவைகளிலும் ஒரு ஒழுங்குமுறை இருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய ஒழுங்குமுறை இருப்பதால்தான், புள்ளியியலில் மாதிரித் தேர்வுகளின்மூலம் முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி ஆராய முடிகிறது.

ஒரு வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கணக்கியல் ஊக அளவைக் கோட்பாட்டின்படி ஓர் இயைபிலாக் கூறெடுத்தல் முறையில் (Random) மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதானால், அம் மாதிரியில் அடங்கியிருக்கும் உறுப்புகள் மொத்தத்தில் முழுமைத் தொகுதியிலிருக்கும் உறுப்புகளின் குணாதிசயங்களைப் பெற்றிருக்கும் எனப் புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதி அறிவிக்கிறது.

ஓர் ஒழுங்கான கனசதுர வடிவமுள்ள பகடையின் ஆறு பக்கங்களிலும் முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற இலக்கங்களைக் குறிக்கவும். அதன் வீச்சுகளைப்பற்றிச் (throws) சிந்திக்கவும். ஒவ்வொரு வீச்சிலும் வரும் இலக்கத்தை ஒரு தனி நிகழ்ச்சியாகக் கொள்ளலாம். பகடை தேயாமலிருக்கும்வரை, அதைக்கொண்டு இலட்சக்கணக்

கான வீச்சுகளை உண்டாக்க முடியும். பகடையை 6,000 தடவைகள் உருட்டிப் பக்கங்களில் குறிப்பிடப்பட்ட இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கவனித்தால், ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட இலக்கமும் ஏறக்குறைய 1,000 தடவைகள் நிகழ்வதைத் திட்டவட்டமாகக் காணலாம். ஏனெனில், ஒவ்வொரு வீச்சிலும் ஆறு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொரு நிகழ்ச்சி ஏற்படலாம். இந்த ஆறு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் சம வாய்ப்பு அளிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இருந்தபோதிலும், பகடையை ஒரு தடவை உருட்டினுல் எந்த நிகழ்ச்சி ஏற்படும் என்று நம்மால் உறுதியாகக் கூற முடியாது. ஆனுல், அநேக தடவைகள் உருட்டும்பொழுது மொத்தத்தில் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் ஏறக்குறைய ஆறில் ஒரு பாகமாக வியக்கத்தக்கவாறு ஏற்படுகிறது.

அம் மாதிரியே ஒரு மரத்தின் ஏதேனும் நூறு இலைகளைப் பறித்து அவைகளின் சராசரி நீளத்தைக் கணக்கிட்டால், அந்த அளவிற்கும் மரத்திலுள்ள எல்லா இலைகளின் சராசரி அளவிற்குமுள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவில் இராது. அதாவது மாதிரியின் சராசரி அளவுக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் உண்மையான அளவுக்குமுள்ள வேறுபாடு மிகக் குறைவாகத்தா னிருக்கும்.

ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட கால அளவில் போக்குவரத்துச் சாதனங்களால் ஏற்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கையும், ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஏற்படும் பிறப்பு, இறப்பு முதலிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையும், ஒரே சீராகவும் ஒழுங்காகவும்தான் ஏற்படுகின்றன என்பதையும் காணலாம்.

ஆகவே, முழுமைத் தொகுதியில் அடங்கி இருக்கும் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் சம வாய்ப்பு (equal chance) அளித்து, அதிக எண்ணிக்கைகள் அடங்கிய, ஒரு 'ராண்டம் மாதிரி' (Random sample) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், அம் மாதிரிக் கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் தன்மைகள் (characteristics), முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் தன்மைகளைக் கூடியவரையில் பொதுவாகப் பெற்றிருக்கும் எனப் புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதியினுல் அறியலாம்.

இந் நியதியில் இரண்டு முக்கியக் கருத்துகள் அடங்கியுள்ளன: ஒன்று, முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் சம வாய்ப்பு அளிக்கப்பட்டு மாதிரித் தேர்வு எடுக்கப்படவேண்டும். இரண்டாவதாக, மாதிரியிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் முழுமைத் தொகுதிக்கு ஏற்றவாறு அதிகமாகவும் இருக்கவேண்டும்.

இந் நியதியைக் கடைப்பிடித்துதான், ஒரு மாதிரியிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி நாம் மதிப்பீடு செய்கிறோம்.

பேரினங்களின் மாருப் பொதுமை
(Law of Inertia of Large Numbers)

இதைப் புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதியின் கிளைத் தேற்றமாகக் கொள்ளலாம். உறுப்புகளின் அளவிடக்கூடிய தன்மைகள் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மாறுபட்டிருந்தபோதிலும் உறுப்புகளின் முழுமைத் தொகுதியைக் கவனிக்குங்கால், அம் முழுமைத் தொகுதி மாறுமியல்பற்ற ஒரு பொதுத் தன்மையைப் பெறுகிறது என்பதை இது விளக்குகிறது.

பொதுவாக, தனிப்பட்ட உறுப்புகளின் மதிப்புகள் மாறினுலும் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மை ஏறக்குறைய மாருமலேயே இருக்கும். ஒரு பகடையை உருட்டும்போது, பக்கங்களில் குறிப்பிட்ட ஏதாவதொரு இலக்கம் வருவதற்குரிய ஊக அளவு $\frac{1}{6}$ என அறிவோம். 60 தடவை உருட்டினுல், பொதுவாக ஒவ்வொரு பக்கமும் 10 தடவை வருவதில்லை. ஆனுல், 600 தடவைகள் சேர்ந்தாற்போல உருட்டினுல், ஒவ்வொரு பக்கமும் 90 தடவைக்குமேல் 110 தடவைக்குள்தான் வரும் என எதிர்பார்க்கலாம். இதிலிருந்து உருட்டுதலின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கைகளில் ஏற்படும் வேறுபாடுகள் குறைந்துகொண்டே வரும். இவ்வாறு எண்கள் பெரிதாக, வேறுபடும் அளவு குறைந்துகொண்டு செல்வதையே 'பேரினங்களின் விதி' என்று கூறப்படுகிறது. மேலும், கூறுகளிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, இரு வேறு கூறுகளின் அமைப்புகளுக்குள்ள வேறுபாடும் குறைந்துகொண்டே செல்லும். அதாவது கூறுகளின் அளவுகள் பெரிதாகப் பெரிதாக, கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகள் அதிகம் மாருமல் ஏறத்தாழ நிலையாக இருக்கும் தன்மையே 'பேரினங்களின் மாருப் பொதுமை' எனப்படும்.

பயிற்சி

1. புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதி என்ருல் என்ன? புள்ளியியலில் எவ்வாறு இந் நியதியின் கருத்து அடிப்படையாக உள்ளது என்பதற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கூறி விளக்குக.
2. பேரினங்களின் மாருப் பொதுமை என்ருல் என்ன?
3. பின்வரும் விவரங்களில் எவ்வித ஒழுங்கு எதிர்பார்க்கப்படுகிறது என்பதனை விளக்குக.
   (i) ஓராண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட பருவத்தில் தினந்தோறும் அளவிட்ட வெப்ப நிலையின் பெருமத்தின் செய்திகள்.
   (ii) ஒரு மருத்துவச்சாலையில் ஆண்டுதோறும் பிறக்கும் குழந்தைகளை இனம் வாரியாகப் (according to sex) பிரித்தறிவிக்கும் செய்திகள்.

2. புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல்

(Collection of data)

முதனிலைக் கருத்துகள்

புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து ஆராய்வதற்குமுன் சிக்கலின் அமைப்பைப்பற்றித் திட்டமானதும் தெளிவானதுமான கருத்தை மேற்கொள்ள வேண்டும். முதலில் விசாரணைக்குரிய ஒரு நிலையான திட்டத்தை அமைத்துக்கொள்ளல் வேண்டும். விசாரணையை எந்த அளவுக்கு நடத்தவேண்டும் என்றும், விசாரணையைப் பூர்த்தி செய்ய ஆகும் பணச் செலவு, கால வரம்பு, செயலாற்றுவோரின் எண்ணிக்கை முதலியவற்றைப்பற்றி முன்கூட்டியே மனதில் திட்டம் வகுத்துக்கொள்ள வேண்டும். சிக்கலுக்குரிய செய்திகள் இரகசியமானவையா அல்லது பொதுப்படையானவையா என்று அறிந்துகொள்ள வேண்டும். மேலும், செய்தி விவரங்கள் எக் காலத்தில், எந்த இடத்தில், எவரிடமிருந்து திரட்டப்படவேண்டும் என்பதைத் தீர்மானித்துக் கொள்ளவேண்டும். முழுக் கணிப்பு விவரம் தேவையா அல்லது மாதிரித் தேர்வின்மூலம் அறிந்தால் போதுமா என்பதை உறுதி செய்துகொள்ளவேண்டும். ஏற்கெனவே, சேகரிக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து விசாரணைக்கேற்ப செய்திகளைத் திரட்டி ஆராயவேண்டுமா அல்லது புதிதாகச் செய்திகளைத் திரட்டி ஆராய வேண்டுமா என்பதைத் தீர்மானித்துக் கொள்ளவேண்டும். அளவினங்களுக்குரிய அலகுகளை முன்கூட்டியே நிர்ணயித்துக் கொள்ளவேண்டும். எந்த அளவுக்குச் சுத்தமாக அளவிடப்பட வேண்டும் என்பதையொட்டி அளவின விவரங்களைச் சேகரித்தலில் முற்படவேண்டும்.

முழுக் கணிப்பு விவரம் தேவையில்லாத சமயங்களில், எம் முறையைக் கையாண்டு மாதிரித் தேர்வுகள் நடத்தப்படவேண்டும் என்

பதைப்பற்றி முடிவு செய்துகொள்ளவேண்டும். சில சொற்களை அவற்றின் இடம், பொருள் அறிந்துதான் பயன்படுத்தவேண்டும். உதாரணமாக, வருமான வரியானது வருமான வீதத்தின் படுகைக்கு ஏற்றவாறு ஏறவோ தாழவோ ஏற்படும். அவ்வப்பொழுது அரசாங்கத்தின் ஆளுகைக்குட்பட்ட பரப்புகளுக்குத் தக்கவாறு புள்ளி விவரங்களைக் கூட்டி அல்லது குறைத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

புள்ளி விவரங்கள் சேகரித்தலை இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கலாம் :

(1) முதனிலை விவரங்களாகச் சேகரித்தல் (collection of primary data), (2) இரண்டாம் நிலை விவரங்களாகச் சேகரித்தல்.

முதனிலை விவரங்கள்

நேரடியாகவும் உடனடியாகவும் அவ்வப்பொழுது விசாரணைக்கேற்பச் சேகரிக்கப்படும் புள்ளி விவரங்கள் முதனிலை விவரங்களாகும்.

இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்

பலவித நோக்கங்களுடன் முன்பே சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து, தற்போதைய விசாரணைக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட விவரங்களே இரண்டாம் நிலை விவரங்களாகும்.

புள்ளி விவரங்களை வெளியிடப்பட்ட அல்லது வெளியிடப்படாத ஆதாரங்களிலிருந்து பெறலாம். அம் மாதிரியான ஆதாரங்களை 'இரண்டாம் நிலையின் பிறப்பிடம்' என்று சொல்லலாம். இரண்டாம் நிலை விவரங்களின் தோற்றுவாய்களில் (sources) சில பின்வருமாறு :

(a) வெளியீடுகள்

(i) அரசாங்க அலுவலகங்கள், சிறப்புக் குழுக்கள் (commissions) முதலானவைகளின் செய்தி இதழ்கள்.

(ii) ஊராட்சி மன்றம், மாவட்ட அலுவலகங்களின் வெளியீடுகள்.

(iii) வியாபாரத் துறைகளில் ஏற்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அலுவலகங்களின் மாதாந்திர வெளியீடுகள்..

(iv) பல்கலைக் கழகங்களின் வெளியீடுகள்.

(v) தனிப்பட்ட ஆராய்ச்சியாளர்களின் கையேடுகள்.

(b) குறித்த பருவத்தில் வரும் செய்தி அறிக்கைகள்

புள்ளி விவரங்கள் முதனிலை விவரங்களாக முதலில் சேகரிக்கப்பட்டுக் காலப்போக்கில் அவைகளே இரண்டாம் நிலை விவரங்களாகின்ற காரணத்தால், நாம் முதனிலை விவரங்களைச் சேகரித்தலில் கையாளும் முறைகளைப்பற்றிக் கவனிப்போம்.

முதனிலை விவரங்களைச் சேகரிக்கும் வகைகள்

முதனிலை விவரங்களைப் பின்வரும் முறைகளைக் கடைப்பிடித்துத் திரட்டலாம்.

(i) நேரடியாகத் தனிப்பட்ட முறையில் சேகரித்து ஆராய்தல்.

(ii) கணிப்பாளர்கள்மூலம் தகவல் தெரிவிப்பவர்களிடமிருந்து விவரங்களைச் சேகரித்தல்.

(iii) வினுத் தொகுதிகளைத் தபால்மூலம் அல்லது நேரடியாகக் கணிப்பாளர்களை அனுப்பி, தகவல் தெரிவிப்பவர்களிடமிருந்து விவரங்களைத் திரட்டுதல்.

(iv) பதிவு செய்தலின்மூலம் (registration) விவரங்களைச் சேகரித்தல்.

(i) நேரடியாகத் தனிப்பட்ட முறையில் ஒரே ஆய்வாளரால் விசாரணையை மேற்கொள்ளுவது

இம் முறையில் ஆய்வாளரின் மேற்பார்வையின் கீழ்தான் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுவதால் அவ்வப்பொழுது ஏற்படும் இடையூறுகளை நீக்கி உண்மையான விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியும். தவிரவும் விசாரணையைப்பற்றி நேரடியாகக் கேட்டுச் சரியான தகவல்களை அறிந்துகொள்ள நேரமிருக்கிறது. மேலும், கிடைத்த செய்திகளின் மேல் உறுதியும் நம்பிக்கையும் வைக்க இடமிருக்கிறது.

ஒரு நகரத்திலுள்ள தொழிலாளர்களைப்பற்றியோ ஒரு கல்லூரியிலுள்ள மாணவர்களின் அறிவு நுட்பத்தை ஆராய்வதிலோ இம் முறையைப் பயன்படுத்தி உண்மையான முடிவுக்குவர முடிகிறது. இவ் விசாரணைகளின்மூலம் கிடைக்கக்கூடிய ஊகங்களின்மேல் வைக்கும் நம்பிக்கையின் தரம் உயருகிறது.

இம் முறையில் சில குறைபாடுகளும் உள்ளன. முதலாவதாக, இதை ஒரு சிறிய அல்லது வரம்புக்குட்பட்ட விசாரணை (limited enquiry) யில்தான் பயன்படுத்தமுடியும். இரண்டாவதாக, ஆய்வாள

ரின் தனிப்பட்ட கருத்துகளுக்கு இடமளிக்கப்பட்டு, விவரங்களை அவருடைய விருப்பத்திற் கேற்றவாறு பயன்படுத்த முடியும். ஆதலால், செய்தி விவரங்களைத் தவருன வழிகளில் பயன்படுத்தவும் முடியும்.

ஆய்வாளர் நேர்மையானவராகவும் நீதிநிலை தவருதவராகவும் இருப்பாரேயாளுல், இம் முறையின் சிறந்த ஊகங்களைப் பெறலாம்.

(ii) கணிப்பாளர்களை நியமித்து முதனிலை விவரங்கள் சேகரித்தல்

இம் முறையைப் பெரிய விசாரணைகளில் (large enquiries) பயன்படுத்தி அதிகமான தகவல்களைச் சேகரிக்க முடியும். சிக்கலான செய்திகளையும் திரட்டமுடியும். இம் முறையைக் கடைப்பிடிக்க அதிகப் பணச் செலவும் கால தாமதமும் ஏற்படுமாதலால், அரசாங்கத்தார் அல்லது அவர்களைச் சார்ந்த குழுவினர்களாலேயே விசாரணையை மேற்கொள்ளமுடியும். அரசாங்கத்தாரால், விசாரணைக்கேற்ப வசதிகளையும் சில சட்டங்களை அமல்படுத்தி மக்களை உண்மையான தகவல்களைத் தெரிவிக்கும்படியும் செய்யமுடியும். தவிரவும், அரசாங்க அலுவலகங்களில் வேலைபார்க்கும் குமாஸ்தாக்கள், ஆசிரியர்கள், கிராம அதிகாரிகள் முதலியோரை ஊதியமின்றி இலவசமாக வேலைக்கு அமர்த்திக்கொள்ள முடியும். மேலும், ஆய்வாளர்களுக்குச் செய்தி விவரங்களைத் திரட்டுவதற்கும் மக்களிடம் சாமர்த்தியமாகப் பழகு வதற்கும் பயிற்சியளிக்கப்படுகிறது. ஆதலால், ஆய்வாளர்க ளனைவரும் ஒரே மாதிரியாக விளுத் தொகுதிகளைப் பூர்த்தி செய்து, சரியான முதல் நிலை விவரங்களைச் சேகரிக்க முடிகிறது. பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை மக்கள்தொகைக் கணிப்பு (census) இம் முறையில்தான் நடக்கிறது.

(iii) விளுத் தொகுதிகளைப் பயன்படுத்தி முதனிலை விவரங்களைச் சேகரித்தல்

தகவல் தெரிவிப்பவர்களை ஆய்வாளர்கள் பேட்டி கண்டு விவரங் களை அறிந்து, விளுத் தொகுதிகளைப் பூர்த்தி செய்யலாம். ஆய்வாளர்கள் மக்களை நேரிடையாகச் சந்திப்பதனுல், விளுத் தொகுதிகளிலடங்கிய கேள்விகளைச் சரிவர விளக்கி, அவைகளுக் கேற்ப விடைகளைப் பூர்த்தி செய்துகொள்ள முடிகிறது.

விளுத் தொகுதிகளைத் தபால்மூலம் இலவசமாக அனுப்பியும் முதல்நிலை விவரங்களைச் சேகரிக்கலாம். ஆய்வாளர்கள் ஒவ்வொரு நபரையும் பேட்டி கண்டு, விளுத் தொகுதிகளைப் பூர்த்தி செய்யும் காலத்தைவிடத் தபால்மூலம் அனுப்புவதனுல் வெகு சீக்கிரத்தி லேயே முதல்நிலை விவரங்களைப் பெறமுடியும். ஆனுல், இம் முறை

யைக் கையாளுவதில் ஒரு பெரிய குறையுள்ளது. அதாவது, எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்களுக்கே வினாத் தொகுதிகளை அனுப்பி விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியும்.

மற்றும் கால வரம்பிற்குள் எல்லா வினாத் தொகுதிகளையும் திரும்பப் பெறமுடியாது. கிடைத்தவற்றில் சில வினாத் தொகுதிகள் சரிவரப் பூர்த்தி செய்யப்படாமலிருக்கலாம். ஆதலால், வினாத் தொகுதியை அடிப்படையாகக் கொண்டு முதல்நிலை விவரங்களைச் சேகரிக்கும்பொழுது பின்வரும் விதிகளைப் பின்பற்றவேண்டும்.

(1) வினாத் தொகுதியிலுள்ள கேள்விகளனைத்தும் நயமாகவும் தெளிவாகவும், எளிதாகவும், சுருக்கமாகவும் அமைத்தல் வேண்டும்.

(2) பொதுவாக, கேள்விகளுக்குள்ள விடைகள் 'ஆம்' அல்லது 'இல்லை' அல்லது ஓர் எண் அல்லது ஓர் ஊர் பெயர் என்று ஒரே வார்த்தையில் பதிலளிக்கக் கூடியவையாக இருக்கவேண்டும்.

(3) நடைமுறையில் சிக்கலான கேள்விகளுக்குப் பதிலளிக்கும் சந்தர்ப்பங்களில், செய்தி விவரங்களைத் தெரிவிப்பவர் மனக் கசப்புக் கொண்டு, அலட்சியமாகத் தகவல்களைத் தெரிவிக்க நேரிடும். ஆதலால், கேள்விகளைத் தெளிவுபடுத்துவதற்காக அங்கங்கே சிறு குறிப்புகள்மூலம் விளக்கம் தரவேண்டும்.

(4) கேள்விகள் புறப்பொருள் தன்மையைச் சார்ந்ததாக (objective questions) அமைக்கப்படவேண்டும்.

(5) கேள்விகள், ஒருவருடைய மனதைப் புண்படுத்தக்கூடியதாகவோ தப்பெண்ணம் கொள்ளக்கூடியதாகவோ இருத்தல் கூடாது. மேலும், பிறரது சொந்த விஷயங்களில் தலையிடக் கூடியதும், பொருளற்றதும், சந்தேகத்திற்கிடமளிக்கக் கூடியதுமான வினாக்களை விலக்குவதே நலம்.

(6) எந்த அளவுக்குத் திருத்தமாக அளவின விவரங்கள் சேகரிக்கப்படவேண்டும் என்பதை நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

(7) கேள்விகளை ஒன்றையொன்று தழுவி உறுதிப்படுத்தும்படி (corroborate) வரிசையாக அமைத்தல்வேண்டும்.

(iv) பதிவு செய்தலின்மூலம் விவரங்களைச் சேகரித்தல்

பிறப்பு, இறப்பு ஆகிய நிகழ்ச்சிகள்பற்றிப் பதிவு செய்யப்படுவதன் வாயிலாக விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியும்.

3. புள்ளி விவரங்களை அறிமுகப் படுத்துதலின் வகைகள்

புள்ளி விவரங்களை ஒன்ருகத் திரட்டித் தொகுத்துப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்து வெளியிட்டுக் கூறலாம் அல்லது செய்திகளை வரைபடங்களின்மூலமாகவோ அட்டவணைகளின்மூலமாகவோ தெளிவுபடுத்தலாம். ஆனல், ஆராய்வதன்மூலம் அடைகின்ற விவரங்களிலிருந்து உடனடியாகவே உண்மையை அறிவது சற்றுக் கடினமானது. ஏனெனில், அவ் விவரங்கள் முழுவதையும் படித்து, அவ் விவரங்களிலடங்கிய கருத்துகளை அறியவேண்டியிருக்கிறது. அங்ஙனம் எல்லோராலும் புள்ளி விவரங்களைப் படித்தறிவது இயலாது. எனவே, செய்தி விவரங்களைத் தொகுத்துத் தரப்படுத்தி அதனைச் சுருக்கி அட்டவணையிலமைக்கிறேம். இவ்வாறு அமைக்கும்போது, புள்ளி விவரங்களில் நிகழும் மாறிகளின், ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை மனதில் உடனடியாக தெளிவுபடுத்திக் கொள்ள முடிகிறது.

பாகுபாடு (Classification)

புள்ளி விவரங்கள் எண்ணுவதாலோ அல்லது அளப்பதாலோ சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பதை நாம் முன்பே அறிவோம். அவைகளை ஆராய்ந்தறிவதற்காகப் பாகுபடுத்தல் வேண்டும். இம் மாதிரி வகைப்படுத்துதல் அல்லது ஒழுங்குபடுத்துதலின் செயல் முறையே பாகுபாடாகும். புள்ளி விவரங்களை அளவுக்கேற்றவாறும், பண்புகளுக்கேற்றவாறும், இட அமைப்புகளுக்கேற்றவாறும், கால நிலைகளுக்கேற்றவாறும் நான்கு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. உயரம், எடை, மழையளவு, மதிப்பெண்கள் முதலியவை அளவின் அடிப்படையில் பிரிக்கத் தகுந்தவை.

1. மக்களை மதத்திற்கேற்றவாறு பிரித்தல், தொழிலாளிகளைத் திறமையுள்ளவர், திறமையற்றவர் என்று பிரித்தல் ஆகியவை பண்பின் அடிப்படையில் பிரிக்கப்பட்டவை.

2. ஒரு நாட்டின் மக்கள் தொகையை, மாவட்டப் பகுதிகளுக்கேற்றவாறு அதாவது இட அமைப்புக்கேற்றவாறு பிரிக்கலாம்.

3. குறிப்பிட்ட காலங்களில் சேகரிக்கப்பட்ட செய்திகளனைத்தும் காலத்தொடர் வரிசைச் செய்திகளாகும். ஆண்டுக்கொரு முறையாகப் பல ஆண்டுகளுக்குக் கணக்கிடப்பட்ட, ஒரு நாட்டின் பிறப்பு, இறப்பு விகிதங்களின் தொடர்ச்சியே காலத் தொடர் வரிசைக்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டாகும்.

பட்டியல் அமைப்பு (Tabulation) செய்திகளைச் சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும் வெளிப்படுத்துவதே பட்டியலமைப்பின் முக்கிய நோக்கமாகும். பாகுபடுத்தப்பட்ட செய்திகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கு, அவைகளை ஓர் அட்டவணையில் அமைக்கிறோம். அட்டவணைகளை அவ்வப்போது செய்திகளுக்கேற்றவாறு அமைக்க வேண்டுமே தவிர, இதனை அமைப்பதற்கென்று குறிப்பிட்ட விதிகள் எதுவும் இல்லை. எனவே, நமது அனுபவத்தையும் பகுத்தறிவையும் கொண்டுதான் அட்டவணையை அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். இருந்தபோதிலும், அட்டவணையிடும்போது கவனிக்கவேண்டிய சில விதிகளாவன :

1. அட்டவணை ஒவ்வொன்றிற்கும் பொருத்தமான தலைப்புக் கொடுக்கப்படவேண்டும்.

2. பத்திகளும் வரிசைகளும் செவ்வனே தயாரிக்கப்பட்டு, ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கேற்றவாறு அமைக்கப்படவேண்டும்.

3. நீளமான பத்திகளில் வரும் எண்களைப் பட்டியலில் அமைக்கும்போது, ஐந்து அல்லது பத்து வரிசைகளுக்குப்பின் இடைவெளிகள் விடவேண்டும். அட்டவணையை அழகுபடுத்த, அதற்கு மேலும் கீழும் இரட்டைக் கோடுகளை அமைக்கலாம்.

4. அட்டவணையின் இறுதியில், தலைப்பைச் சுருக்கிப் பட்டியலிலிடப்பட்ட செய்திகள் முதலியவற்றை விளக்க அவசியமானால் தனியாகச் சிறு குறிப்புகள் தரவேண்டும்.

5. பயன்படுத்தும் அலகுகளைத் தெரிவிக்கவேண்டும்.

6. சுருக்கமான முறையில் எந்த அளவுக்குத் திருத்தமாகச் செய்திகள் பட்டியலில் தொகுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதைக் குறிக்க வேண்டும். மேலும், மிகப் பெரிய இலக்கங்களுள்ள எண்களை அப்படியே எழுதாமல், இலக்கங்களைக் கோடி, ஆயிரம் என உடனடியாகப் பிரிக்கும் வண்ணம் பிரித்தெழுதுவதே முறையாகும்.

7. விவரங்களின் தோற்றுவாய்களைக் குறிப்பிடவேண்டும்.

பட்டியல்கள் சுலபமாகவோ கடினமானதாகவோ இருக்கலாம். பெரும்பாலும் ஒரே ஒரு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளைத் தெரிவிக்கும் பட்டியல்கள் எளிதானவையே. இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் அளவினச் செய்திகளைத் தொகுத்தமைக்கும் பட்டியல்கள் சிக்கலானவை.

எடுத்துக்காட்டான சில பட்டியல்கள்.

பட்டியல் 1

சில நாடுகளில் சராசரி ஓர் ஏக்கர் நிலத்தில் உற்பத்திசெய்த நெல் விளைச்சலின் பட்டியல்.

நாடு	உற்பத்தி (ஏக்கருக்கு) பவுண்டில்
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...

பட்டியல் 2

இந்தியக் குடியரசின் மக்கட் தொகைப் பட்டியல்.

ஆண்டு	மக்கட்தொகை (கோடியில்).
1911	...
1921	...
1931	...
1941	...
1951	...
1961	...

பட்டியல் 3

இரு இடங்களிலுள்ள கம்பெனிகள் வருமானத்தின் வாயிலாகத் தொகுத்தறிவிக்கும் அட்டவணை.

ஆண்டு வருமானம் (ஆயிரம் ரூபாயில்)		5	20	40	60	85	110	150	200
கம்பெனிகள்	A பிரிவு								
	B பிரிவு								

பட்டியல் 4

சில ஆண்டுகளாக இந்தியாவில் உற்பத்தி செய்த பலவகைத் தாள்களின் பட்டியல்.

தாள்களின் வகைகள்	உற்பத்தி ஆயிரம் (டன்களில்)		
	1945	1950	1960
அச்சிடவும், எழுதவும்			
அட்டைத் தாள்			
தடித்த தாள்			
தனிச்சிறப்புள்ள தாள்			
மொத்தம்			

பட்டியல் 5

ஒரு நகரத்திலுள்ள மக்கள் தொகையை இன, சமய, வயது முறைப்படிப் பிரித்துக் காட்டும் பட்டியல்.

வயதுப் பிரிவு	இந்துக்கள்		இஸ்லாமியர்		கிறிஸ்தவர்		சீக்கியர்	
	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்
0—15								
15—30								
30—45								
45—60								
60-க்கு மேல்								
மொத்தம்								

பட்டியல் 6

இந்தியாவிலிருந்து ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட பருத்தி ஆடைகளின் விவரப் பட்டியல்.

ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட நாடுகள்	1949-1950		1950-1951	
	ஆடைகள் (பீஸில்)	விலை (ரூ-ல்)	ஆடைகள் (பீஸில்)	விலை (ரூ-ல்)
கிழக்கு ஆப்ரிக்கா	...	...	...	...
மத்திய கிழக்கு ஐரோப்பா	...	...	...	...
ஐரோப்பா	...	...	...	...
கிழக்கு ஆசியா	...	...	...	...

பட்டியல் 7

ஒரு பல்கலைக் கழக மாணவர்களை வயது, வகுப்பு இருப்பிடத்திற்கேற்றவாறு அறிவிக்கும் பட்டியல்.

பிரிவு	விடுதியில் இருக்கும் மாணவர்கள்			வீட்டில் தங்கும் மாணவர்கள்			மொத்தம்
	18 வயதுக்குக் கீழ்	18 வயதுக்கு மேல்	மொத்தம்	18 வயதுக்குக் கீழ்	18 வயதுக்கு மேல்	மொத்தம்	
புகுமுக வகுப்பு	...	...	...	...	...	...	...
B. A. / B.Sc. முதலாண்டு	...	...	...	...	...	...	...
இரண்டாவது ஆண்டு	...	...	...	...	...	...	...
மூன்ருவது ஆண்டு	...	...	...	...	...	...	...
மொத்தம்							

கீழ்வரும் செய்தியைக் கவனிக்கவும்.

1945-ஆம் ஆண்டில் ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள 1,750 தொழிலாளர்களில் 1,200 பேர் தொழிற்சங்கத்தின் அங்கத்தினர்கள். தொழிற்சாலையிலுள்ள 200 பெண்களில், 175 பேர் சங்கத்தில் சேராதவர்கள். 1950-ஆம் ஆண்டில் அங்கத்தினர்களின் எண்ணிக்கை 1,510. இதில் 1,290 பேர் ஆண்கள். சங்கத்தில் சேராதவர்களின் எண்ணிக்கை 208 ஆகக் குறைந்துவிட்டது. இதில் ஆண்கள் 180. 1955-ஆம் ஆண்டில் தொழிற்சாலை சம்பளப் பட்டியலில் 1,800 பேர் சங்கத்தைச் சேர்ந்தவர்கள் என்றும், 50 பேர் சங்கத்தில் சேராதவர்கள் என்றும் குறிப்பிடப்பட்டிருந்தன. இவ்வாண்டில் 300 பெண் தொழிலாளிகளில் 8 பேர் மட்டுமே சங்கத்தில் சேராதவர்கள்.

விவரம்	1945			1950			1955		
	ஆண்	பெண்	மொத்தம்	ஆண்	பெண்	மொத்தம்	ஆண்	பெண்	மொத்தம்
அங்கத்தினர்	1,175 ஊ	25 உ	1,200 ஆ	1,290 ஆ	220 இ	1,510 அ	1,508 எ	292 ஊ	1,800 அ
அங்கத்தினரல்லாதவர்	375 எ	175 ஈ	550 ஐ	180 உ	28 ஊ	208 ஈ	42 ஏ	8 உ	50 ஆ
மொத்தம்	1,550 ஏ	200 இ	1,750 அ	1,470 எ	248 ஏ	1,718 ஐ	1,550 ஐ	300 ஈ	1,850 இ

இப்பட்டியலில் உயிரெழுத்துகளின் போக்கு சிற்றறைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் வழிகாட்டியாகவுள்ளது.

தனித்த மாறிகள், தொடர் மாறிகள்
Discrete Variatis, Continuous Variatis

ஒரு வரம்பிற்குள் அடங்கும் மதிப்புகளை ஏற்கக்கூடிய ஓர் எண் குறியே மாறியாகும். அவ்வரம்பிற்குள் ஏதாவதொரு மதிப்பை மாறி குறிப்பிட்டால் அதையே நிலையான எண்ணைக் கருதலாம். புள்ளி

விவரங்கள் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புகளை எண்ணுவதாலோ, அளப்பதாலோ கிடைக்கின்றன. இம் மதிப்புகளனைத்தையும் மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளாகக் கருதலாம்.

மாறிகளைத் தனித்த மாறிகள், தொடர்ச்சி மாறிகள் என இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். ஒரு குடும்பத்திலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை 3, 5, 6 என முழு எண்களாகவேதான் இருக்கும். ஒரு நூல் நிலையத்திலுள்ள புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை, கல்லூரியில் படிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவை தனித்த மாறிகள் ஏற்கும் உருபுகள், எண்ணுவதன் மூலமாகவே கிடைக்கக் கூடியவை. இவைகள் முழு எண்களாகத்தான் இருக்குமேயன்றிப் பின்னங்களாக இருக்காது. ஆனால் தொடர்ச்சி மாறி, ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்புக்குள் எந்த மதிப்பையும் பெறத்தக்கதே. தவிரவும், தொடர்ச்சி மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளை எந்த அளவுக்குத் திருத்தமாக வேண்டுமென்றாலும் அளக்க முடியும். உயரம், எடை, வெப்பநிலை, வயது முதலியன தொடர்ச்சி மாறிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும். இவைகளை எந்த அளவுக்குத் திருத்தமாக வேண்டுமென்றாலும் அதற்கேற்ப அலகு கோல்களை அமைத்து அளவிட முடியும்.

அலைவுப் பரவல்:— புள்ளி விவரங்களைச் செவ்வனே வகைப்படுத்தி அட்டவணையிலிடுவதன்மூலம் சுருக்கி அறிவிக்கமுடிகிறது. அதற்காக நாம் பல பிரிவுகளை ஏற்படுத்தி, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை எண்ணிக்கைகள் உள்ளன என்று தெளிவாகக் குறிப்பிடலாம். ஒவ்வொரு பிரிவிலும் வரும் எண்ணைப் ‘ பிரிவு எண் ’ அல்லது ‘ பிரிவு அலைவெண் ’ (cell frequency) என்று கூறுவது வழக்கம். இவ்வாறு பல பிரிவுகளை அமைத்து, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அலைவெண்களாக மாற்றிப் பகிர்ந்திடுவதை ‘ அலைவெண்பரவல் ’ அமைப்பு எனலாம்.

20 சிறுவர்களின் எடை (பவுண்டில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

20, 23, 32, 29, 16, 38, 30, 26, 36, 27

27, 24, 28, 25, 18, 34, 21, 27, 28, 35

எண்களைக் கண்டவுடனேயே தெளிவு ஏற்படுகிறது என்று சொல்ல முடியாது. எனவே, இவ் வெண்களை ஏறுவரிசையில் (16, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 27, 27, 28, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 38) என அமைத்து நோக்குங்கால் சற்றுத்

தெளிவு உண்டாகிறது. மேலும்,

15	முதல்	19	பவுண்டு	வரை	எடையுள்ள	சிறுவர்கள்	=2
20	,,	24	,,	,,	,,	,,	=4
25	,,	29	,,	,,	,,	,,	=8
30	,,	34	,,	,,	,,	,,	=3
35	,,	39	,,	,,	,,	,,	=3
						மொத்தம்	=20

என்பதாக, செய்தியைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்தமைத்து எழுதுவதால் ஏற்படும் எண்ணமே மிகத் தெளிவானது. ஆதலால், தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளை அமைத்து, செய்திகளை அலைவெண்பரவலாக மாற்றி அழகாக அமைக்க முடிகிறது.

இப்பரவலமைப்பில் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை மட்டும் தெரியுமேயன்றி, அவர்களின் உண்மையான எடை மறைக்கப்படுகிறது. அதாவது இரு சிறுவர்களின் எடை 15—19-பவுண்டுக்குள் இருக்கும் எனத் தெரியுமேயன்றி, அவர்களின் சரியான எடை 16, 18 பவுண்டு எனத் தெரியாது.

பிரிவு இடைவெளி என்பது பிரிவின் நீள அளவைக் குறிக்கிறது. பிரிவில் அமையும் எண்களே அப்பிரிவின் அலைவெண்களாகும். பெரும்பாலும் பிரிவுகள் சம இடைவெளித் தூரத்தைக் கொண்டுள்ளதாகவே அமைக்கப்படுகின்றன. பிரிவு இடைவெளியின் நடுமைய மதிப்பளவே '**பிரி வெண்**' எனப்படும். ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியும் இரண்டு எண்களை எல்லைகளாகக் கொண்டுள்ளது. இவ்விரு எண்களும் பிரிவின் கீழ் எல்லை, மேல் எல்லை எனப்படும். (15—19)—இப்பிரிவில் 15 என்பது கீழ் எல்லையையும் 19 என்பது மேல் எல்லையையும் குறிக்கும்.

கீழ்வரும் பிரிவு இடைவெளிகளின் அமைப்பைக் கவனிக்கவும்.

(1) 10—20	(2) 10-ம்	20-க்குக் குறைவும்.		
20—30	20-ம்	30 ,, ,,		
30—40	30-ம்	40 ,, ,,		
40—50	40-ம்	50 ,, ,,		

(3) 10—19	(4) 10—	(5) 15
20—29	20—	25
30—39	30—	35
40—49	40—	45

இவைகளில் எது மிகச் சிறந்தது ?

1-வது அமைப்பில் முதல் பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லையும், அடுத்து வரும் இரண்டாவது பிரிவின் கீழ் எல்லையும் ஒரே மதிப்புடையதால், 20, 30,........என்ற மதிப்புடைய உறுப்பை எப்பிரிவில் சேர்ப்பது என ஐயம் உண்டாகிறது. இவ் ஐயப்பாட்டை நீக்க ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லைக்குரிய எண் அப்பிரிவைச் சேர்ந்தது என்றும், முன்கூட்டியே தீர்மானித்துக்கொள்ளவேண்டும். 2-வது அமைப்பில், மேல் எல்லைகள் திட்டவட்டமாகக் குறிப்பிடப்படவில்லை. மேலும், எந்த அளவுக்குத் திருத்தமாக அளவுகள் எடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதும் தெரிவிக்கப்படவில்லை. ஆனால் 3-வது அமைப்பில் எல்லைகள் தெளிவாக உள்ளன; மதிப்புகளும் முழு எண்களுக்குத் திருத்தமாக அளவிடப்பட்டுள்ளன. ஆதலால், இவ்வமைப்பிலுள்ள பிரிவு இடைவெளிகளே நடைமுறையில் கையாளப்பட்டு வருகிறது. 4-வது அமைப்பில், மேல் எல்லைகள் குறிப்பிடப்படவில்லை. 5-வது அமைப்பு, பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகளைத்தான் தெரிவிக்கிறது. எனவே கீழ், மேல் எல்லைகள் தெளிவாகவும், எந்த அளவுக்குத் திருத்தமாக அளவிடப்பட்டுள்ளன என்பதை ஊகித்துக் கொள்ளக் கூடியதாகவும் உள்ள பிரிவு இடைவெளிகளையே கையாள வேண்டும்.

தனித்த மாறியாக வரும்போது, பிரிவு இடைவெளிகளைத் தெளிவாக வரையறுக்க முடியும். ஏனெனில் மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் முழு எண்களாகவே இருக்கும். ஆனால், தொடர் மாறியாக உள்ளபோது அவை அளவிடும் நுட்பத்தைப் பொறுத்திருக்கின்றன. சிறுவர்களின் எடையை அளவிடும்போது 19·5 பவுண்டுக்குக் குறைவாக உள்ளதை 19 பவுண்டாகவும், 19·5ம் அதற்கு மேற்பட்டதையும் 20 பவுண்டாகவும் குறிப்பிடுகிறோம். ஆதலால் (15—19), (20—24), (25—29)......முதலிய தனித்த பிரிவு இடைவெளிகள் (14·5—19·5), (19·5—24·5), (24·5—29·5) என்ற உண்மைப் பிரிவு இடைவெளிகளையே குறிக்கின்றன. இங்குப் பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியாக வருகின்றன. மேலும், ஒவ்வொரு தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளியின் மேல் வரம்பும் அப்பிரிவைச் சேராமல், அடுத்து வரும் பிரிவைத்தான் சேரும் என்றும் அறியலாம்.

ஒரு பிரிவுக்கும் அடுத்துவரும் பிரிவுக்கும் இடையிலுள்ள பிளவு (gap) நீளத்தை இரு சமபாகங்களாகப் பிரித்து, அதைப் பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகளுடன் கூட்டியும், கீழ் எல்லைகளிலிருந்து கழித்தும் பிரிவுகளைத் தொடர்ந்த பிரிவுகளாக மாற்றியமைக்கலாம். மேலும், தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளின் கடைக்கோடி எண்களே கீழ், மேல் வரம்புகள் (lower and upper boundaries) ஆகின்றன.

பிரிவுகளின் கீழ், மேல் எல்லைகளின் (வரம்புகளின்) சராசரியே பிரிவுக் குறிப்பெண்களாகும். பிரிவின் இடைவெளி நீளத்தை அடுத்தடுத்து வரும் இரு பிரிவுகளின் கீழ் எல்லைகளுக்குள்ள வேறுபாட்டாலோ மேல் எல்லைகளுக்குள்ள வேறுபாட்டாலோ அறிவிக்கலாம். பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் முழு எண்ணாக இருப்பதே ஏற்றது. பெரும்பாலும் இடைவெளிகளின் நீளங்கள் ஒரே அளவுள்ளதாகவே இருக்கும். சில சந்தர்ப்பங்களில், அவைகளின் நீளங்கள் வெவ்வேருக இருப்பதுமுண்டு.

பிரிவு இடைவெளிகளை மிகச் சிறியதாகவோ அல்லது மிகப் பெரியதாகவோ இல்லாமலும் அலைவெண்கள் சீராக வரும்படியும் எடுத்தல் நலம். முதலில், உறுப்பு மதிப்புகளின் பெருமத்தையும் சிறுமத்தையும் கண்டு, அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்திற்கேற்பப் பல பிரிவு இடைவெளிகளை நிர்ணயிக்கலாம். பெருமத்திற்கும் சிறுமத்திற்குமுள்ள வேறுபாட்டை வீச்சு (Range) என்கிறோம். எனவே, வீச்சு நீளத்தைப் பிரிவு இடைவெளித் தூரத்தால் வகுத்துப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையைத் தோராயமாகக் கண்டுகொள்ள முடியும்.

கீழ், மேல் எல்லைக்குள் முழு எண்களாக வரும்படி, பிரிவுகளை அமைக்கலாம். அல்லது பிரிவுக் குறிப்பெண்கள் முழு எண்களாக வருமாறும் அமைக்கலாம். பிரிவு இடைவெளி எல்லைகள், கொடுத்திருக்கும் விவரங்களில் வரும் எண்களாக வராமல் எடுப்பது நலம்.

40 மாணவர்கள் புள்ளியியலில் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளைத் தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்டு, அலைவெண்பரவலாக மாற்றி அமைக்கலாம்.

31	56	46	47	39	59	36	54	40	48
34	55	48	45	35	40	45	41	47	53
33	57	42	60	47	38	42	54	52	44
43	64	50	37	46	43	58	49	51	53

இவ்வெண்களில் மிகப் பெரிய எண் $= 64$

,, மிகச் சிறிய எண் $= 31$

வீச்சு $= 64 - 31 = 33$.

ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளித் தூரத்தையும் 5-ஆகக் கொண்டால், மொத்தத்தில் 7 பிரிவுகள் ஏற்படுகின்றன. பிரிவு இடைவெளிகளை (30—34); (35—39);......(60—64) எனக் கொள்ளலாம்.

ஒவ்வொரு பிரிவில் வரும் எண்களை எளிதாகக் கணக்கிட, கொடுத்திருக்கும் மதிப்பெண்களை ஒவ்வொன்றாக எடுத்து, அவைகள் ஒவ்வொன்றும் எப்பிரிவைச் சேர்ந்தது என்பதற்கறிகுறியாக, அப்பிரிவு இடைவெளிக்கெதிரில் ஒரு சரி பார்க்கும் குறியை அமைத்திடல் வேண்டும். ஒவ்வொரு 5-வது சரிபார்க்கும் குறியையும் அதற்கு முன் தொடர்ந்து வந்த 4 குறிகளுக்கும் குறுக்கே வரையவேண்டும். இவ்வாறு செய்வதால், பிரிவில் வரும் எண்களை எளிதாகக் கூட்டிப் பிரிவின் அலைவெண்களைக் கணக்கிட முடிகிறது.

பிரிவு இடைவெளி	சரிபார்க்கும் குறியீடுகள்	அலைவெண்
30—34	𝍷𝍷𝍷	3
35—39	𝍸	5
40—44	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
45—49	𝍸 𝍸	10
50—54	𝍸 𝍷𝍷	7
55—59	𝍸	5
60—64	𝍷𝍷	2
		40

மேற்சொன்ன முறையைக் கடைப்பிடித்து இவ் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி

1. 50 உருளைக் கிழங்குகளின் எடைகள் (கிராமில்) கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்டு, இவற்றை ஓர் அலைவெண்பரவலாக அமைத்திடுக.

2	23	27	6	20	13	19	35	14	22
13	25	19	29	16	10	17	11	21	18
32	23	26	18	14	3	19	7	9	13
24	30	18	12	17	16	8	14	9	18
28	33	15	23	28	18	17	34	20	12

2. கீழ்க்காணும் 60 குறியீட்டெண்களை, 7 பிரிவுகளைக் கொண்டு அலைவெண்பரவலாக அமைத்திடுக.

76	79	81	86	86	87	89	90	91	94
100	100	100	99	99	97	96	96	96	95
101	101	102	104	104	104	105	105	106	106
106	107	108	108	109	109	109	110	110	111
118	117	117	116	116	115	114	114	113	112
119	120	121	122	123	124	125	128	129	134

வரைபட விளக்கப்பட மூலம் புள்ளி விவரங்களை விளக்குதல்

செய்தித் தாள்களிலும், விளம்பரங்களிலும் பெரிய எண்களைக் குறிப்பதற்குப் பதிலாகப் படங்கள் மூலம் விளக்கங்கள் தருவதை நாம் எல்லோரும் பார்த்திருக்கிறோம். தொழில் துறையின் வளர்ச்சி, வியாபாரத்தின் வளர்ச்சி முதலியனவும் படமூலமாகச் சில சமயங்களில் காட்டப்படுகின்றன. வைத்திய சாலையில் நோயாளியின் வெப்பநிலை மாற்றத்தைக் குறிப்பதற்கு நோயாளியின் படுக்கைக்கு மேலே வெப்பநிலை படம் தொங்குவதைக் காணலாம். இவையனைத்தும் வரைபடங்கள் எனப்படும்.

எண்கள் மட்டும் சாதாரணமாக எல்லோருடைய மனதையும் கவரச் செய்யுமென்று கூறமுடியாது. விளக்கப்படங்கள், புள்ளிவிவரங்களில் வரும் சிக்கலான நிலைமைகளின் வகைகளையும் தோற்றங்களையும் அறிவதற்கு உதவுகின்றன. ஒரு தேசப் படம் எப்படி உட்பிரிவுகளை விளக்குகின்றதோ, அதேபோல் விளக்கப்படங்கள், எண்களிலடங்கிய உட்கருத்துகள் முழுவதையும் ஒரே சமயத்தில் பிரதிபலிக்கச் செய்கின்றன புள்ளி விவரங்களின் ஏற்றத் தாழ்வுகளை நாம் அவைகளைப் பற்றி எண்ணுவதற்கு முன்னமேயே மனதில் நன்கு பதிய வைப்பதற்கு வரைபடங்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

வரைபடங்கள் சில சித்திரப் படங்களாகவும், சில கோட்டுப் படங்களாகவும், சில் வளைவு கோடுகளாகவும் உள்ளன.

வரைபடங்களின் வகைகள் :

(1) உருவப் படங்கள் அல்லது சித்திர விளக்கப்படங்கள்

(2) வட்ட விளக்கப் படங்கள்

(3) பட்டை விளக்கப் படங்கள்

(4) அலைவுப்பரவல் தரைப்படங்கள்

(a) கோட்டு விளக்கப் படம் (Line Diagram)

(b) செவ்வகப் படம் (Histogram)

(c) அலைவெண் பலகோணப் படம் (frequency polygon)

(d) அலைவெண் வளைகோடு (frequency curve)

(e) திரள் அலைவெண் பலகோணப் படங்கள் (cumulative frequency polygons)

(f) திரள் அலைவெண் வளைகோடுகள் (ogives)

(1) சித்திர விளக்கப் படங்கள்

உறுப்பு மதிப்புகளை அவைகளின் பண்புக்குகந்த உருவங்களை வரைந்து விவரிக்கலாம். உறுப்பு மதிப்புகளை உருவங்களில் பருமன், எண்ணிக்கை முதலியவைகளால் அறிய முடிகிறது. ஒவ்வொரு நாட்டில் விளையும் தேயிலையின் அளவுக்குத் தக்கவாறு தேயிலை நிரம்பிய ஒரே சீரான தகர டப்பாக்களை வரைந்து, அவைகளின் எண்ணிக்கைகள் மூலம் உற்பத்திகளின் வேறுபாட்டை மனதில் நன்கு பதிய வைக்கலாம். ஒரு நாட்டின் காலாட்படை, கப்பற்படை, விமானப்படை முதலியனவற்றை முறையே சிப்பாய்கள், கப்பல்கள், விமானங்களின் படங்களைக் கொண்டு விளக்கலாம். இதில் உருவப் படங்களின் எண்ணிக்கைகள் மொத்த மதிப்புகளுக்குத் தக்கவாறு ஏற்படுகின்றன. ஆண்டுதோறும் ஒரு கம்பெனியில் உற்பத்தியாகும் மின்சார விளக்குகளின் பெருக்கத்தை, மின்சார விளக்குக் குமிழ்கள் மூலம் அறிவிப்பது எல்லோருக்கும் தெரிந்ததே. பல பொருள்களின் ஏற்றுமதி இறக்குமதி விவரங்களை அப்பொருள்களின் உருவத்தைக் கொண்டு விளக்கலாம்.

(2) வட்ட விளக்கப் படம்

ஒரு மாறியின் மொத்த மதிப்பு பல உட்பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தால், ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதிலடங்கிய பரப்பளவை, மாறியின் உட்பிரிவுகளுக்கேற்றவாறு பல வட்ட கோணப் பகுதிகளாகப் பிரித்து விளக்கலாம். ஒரு வட்டத்தின் பரப்பு, அதன் ஆரத்தின் இருபடி வர்க்கத்திற்கு நேர் விகிதசமத்தில் உள்ளது. ($A=\pi r^2$) ஆதலால் ஒரு மாறியின் மொத்த மதிப்பை வட்டத்தின் பரப்பளவு தெரிவிக்கவேண்டுமென்றால், அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தை மாறியின் மொத்த மதிப்பின் வர்க்க மூலத்திற்கு நேர் விகித சமத்தில் இருக்குமாறு எடுத்து வட்டத்தை வரைய வேண்டும். வட்டத்தைப் பல உட் பிரிவுகளாகப்பிரிக்க, உட்பிரிவுகளின் மதிப்புகளை, மாறியின் மொத்த மதிப்பின் பாகமாக மாற்றியமைக்கவும். பிறகு அப்பாகங்களை வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 360°. ஆதலால், 360°-ல் பெருக்கிக் கோண அளவுகளாக (1°க்குச் சுத்தமாக) மாற்றிக் கொள்ளவும். இக்கோணங்களை வட்ட மையத்தில் ஏற்படுத்தும் ஆரங்களை முறையே வரைந்து, பாகங்களாகப் பிரித்துக் காட்டவும். வட்ட கோணப்பகுதிகளைத் தக்க வர்ணமிட்டு விளக்கிக் காட்டலாம்.

ஒரு தொழிலாளி தன் வருமானத்தை எந்த வகையில் செலவு செய்கிறனென்றும், ஒரு நாட்டின் வருமானம் எந்தெந்த வகையில் வந்து சேர்கின்றன வென்றும், வட்டப் படங்கள் மூலம் தெளிவாக விளக்கலாம். சில ஆண்டுகளில் ஒருநாடு இறக்குமதி செய்யும்

பொருள்களின் மதிப்புகளை ஒரே சீரான ஆரங்களுள்ள வட்டங்களை வரைந்து எந்தெந்த நாடுகளிலிருந்து ஆண்டுதோறும் எவ்வளவு மதிப்புள்ள பொருள்கள் இறக்குமதி செய்யப்படுகின்றன என்று, அவ் வட்டங்களைப் பல உகந்த வட்ட கோணப் பகுதிகளாகப் பிரித்து, தக்க வர்ணங்களிட்டு ஒப்பிட்டுப்பார்க்கலாம்.

ஒரு தொழிலாளி தன் வருமானத்தைக் கீழ் வருமாறு செலவு செய்கிறுன். இதை ஒரு வட்டப் பட மூலம் விளக்கவும்.

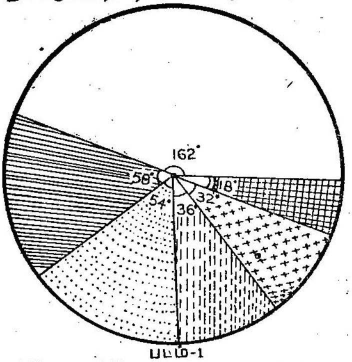
வருமானம் ரூ. 1 =00

பட்டியல் விவரம்	ரூ. நபை.
1. உணவு	0 : 45
2. பொழுது போக்கு (வைத்தியச் செலவு உள்பட)...	0 : 16
3. கல்வி	0 : 15
4. வீட்டு வாடகை	0 : 10
5. உடை	0 : 09
6. சேமிப்பு	0 : 05
மொத்தம்	1 : 00

மாறியின் மொத்த மதிப்பு 100 நயாபைசாக்களானதால் 10 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரையவும். பட்டியலிலுள்ள ஒவ்வொரு உட்பிரிவு வகைக்குத் தக்க கோணங்களைக் கணக்கிடவும். வட்டத்தை அவைகளைக் குறிக்கும் கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும்.

நெ.	பட்டியல்	ரூ. நபை.	டிகிரியின் அளவு	திருத்தம்
1.	உணவு	0 : 45	$\frac{45}{100} \times 360 = 162$	162°
2.	பொழுதுபோக்கு	0 : 16	$\frac{16}{100} \times 360 = 57{\cdot}6$	58°
3.	கல்வி	0 : 15	$\frac{15}{100} \times 360 = 54{\cdot}0$	54°
4.	வீட்டு வாடகை	0 : 10	$\frac{10}{100} \times 360 = 36{\cdot}0$	36°
5.	உடை	0 : 09	$\frac{9}{100} \times 360 = 32{\cdot}4$	32°
6.	சேமிப்பு	0 : 05	$\frac{5}{100} \times 360 = 18{\cdot}0$	18°
	மொத்தம்	1 : 00	மொத்தம்	360°

தொழிலாளி
தன்வருமானத்தைச் செலவிடும் விவரம்.



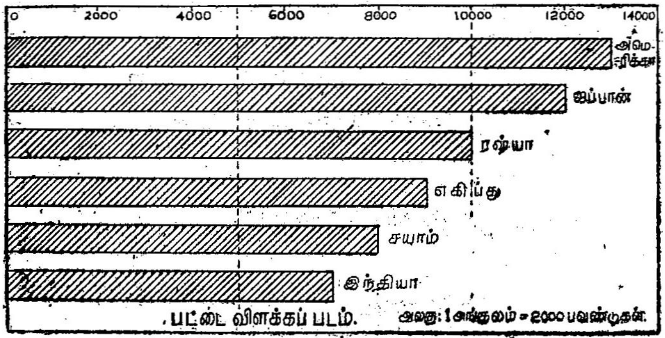
படம்-1

(3) பட்டை விளக்கப் படம்

பட்டைகளை ஒரு கிடை அல்லது நிலைக் கோட்டின் மேல் ஒரே சீரான அளவு இடைவெளிகளை விட்டு, நிறுவி விளக்கப்படும் படத்திற்குப் பட்டை விளக்கப் படம் என்று பெயர். பட்டைகள் சம அகலங்கள் உள்ளனவாகவும், நீளங்கள் புள்ளி விவர மாறிகளின் மதிப்பளவுக்கு ஏற்றவாறும் அமைய வேண்டியது அவசியம். அதாவது தக்க அளவு திட்டத்துடன் பட்டைகள் ஒரு கிடைக் கோட்டின் மேல் நிறுவப்பட்டிருந்தால், கிடைக் கோட்டின் இடதுபுறம் ஒரு நிலைக் கோட்டை அமைத்து அதில் புள்ளி விவரங்களின் அளவுக்குத் தக்கவாறு, அளவு கோலைக் கொண்டு அளவுப் புள்ளிகளைக் குறித்துப் (Scale marks) பட்டைகளின் உயரங்களை ஒப்பிடலாம். அம்மாதிரியே பட்டைகள் ஒரு நிலைக் கோட்டில் கிடையாக நிறுவப்பட்டிருந்தால், அக்கோட்டின் உச்சிப் புள்ளியின் வழியாக ஒரு கிடைக் கோட்டை வரைந்து அதில் அளவு கோலைக் கொண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்கலாம்.

கீழ்வரும் புள்ளி விவரத்தைப் பட்டை விளக்கப்படமூலம் விளக்கிக் காட்டவும்.

	நாடு	ஓர் ஏக்கரில் விளையும் நெல்லின் எடை (பவுண்டில்)
1.	அமெரிக்கா	13,000
2.	ஜப்பான்	12,000
3.	ரஷ்யா	10,000
4.	எகிப்து	9,000
5.	சயாம்	8,000
6.	இந்தியா	7,000



படம்-2.

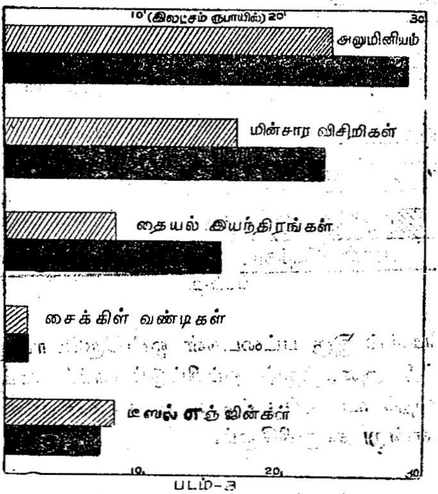
சில சமயங்களில் இரு பட்டைகள் ஒன்ருெடொன்று சேர்ந்தாற் போல் பொருத்தி அமைத்தும் ஒப்பிட்டும் பார்க்கலாம். இப்பட்டை விளக்கப் படத்தைக் **கூட்டுப் பட்டை விளக்கப் படம் (Compound Bar Diagram)** என்று கூறுகிருேம்.

கீழ்வரும் அட்டவணையின் இணை விளக்கப்படத்தை வரைக.

விவரம்	1958-ஆம் ஆண்டில் ஏற்றுமதி (ரூபாயில்)	1959-ஆம் ஆண்டில் ஏற்றுமதி (ரூபாயில்)
1. அலுமினியம்	23,41,103	28,83,764
2. மின்சார விசிறிகள்	16,73,403	22,87,582
3. தையல் இயந்திரங்கள்	7,95,425	15,28,820
4. சைக்கிள் வண்டிகள்	1,43,834	1,44,295
5. டீஸல் ஆயில் எஞ்சின்கள்	7,90,467	6,91,051

அட்டவணையில் டீஸல் ஆயில் எஞ்சின்களின் ஏற்றுமதியின் மதிப்பு 1959-ஆம் ஆண்டில் குறைந்திருப்பதையும், மற்ற வகையருக்களில் ஏற்றுமதி அதிகரிப்பதையும் அறிகிருேம். இவைகளை லட்சத்துக்குச் சுத்தமான மதிப்புகளாகக் கொண்டு, 1 செ.மீ. = 2 லட்சம்

ரூபாய்கள் என அளவுகோலை நிர்ணயித்து, கூட்டுப் பட்டகை விளக்கப்படம் தயாரிக்கவும்.



படம்-3

பட்டை விளக்கப்படத்திலுள்ள ஒவ்வொரு பட்டையையும், மாறியின் உட்பிரிவுகளுக்குத் தகுந்தாற்போல் பிரித்தும் விளக்கலாம். பட்டைகளை ஒரே நீளமுள்ளவைகளாக அமைத்து, அவைகளின் உட்பிரிவுகளைச் சதவீதத்தில் குறித்து வரையப்படும் படத்திற்குச் **சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம்** என்று பெயர்.

நான்கு மாநிலப் பகுதிகளில் வசிக்கும் மத்தியதர வகுப்பைச் சார்ந்த குடும்பங்களில் சராசரியாகச் செலவிடப்படும் தொகைகளின் விவரங்கள் பின்வருமாறு : இவைகளை (1) பட்டை விளக்கப் படம், (2) சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம் மூலம் விளக்கவும்.

மாநிலப் பகுதி	செலவினங்கள்				மொத்தம்
	உணவு	உடை	குடிக்கூலி	மற்றவை	
சென்னை	110	30	45	15	200
பம்பாய்	135	67·5	82·5	15	300
டெல்லி	160	80	120	40	400
கல்கத்தா	175	49	98	28	350

மொத்தச் செலவினை நூறாகக் கொண்டு, ஒவ்வொரு மாநிலப்பகுதியில் வரும் செலவினங்களைச் சதவீதமாகக் கணக்கிடப்பட்டு, பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

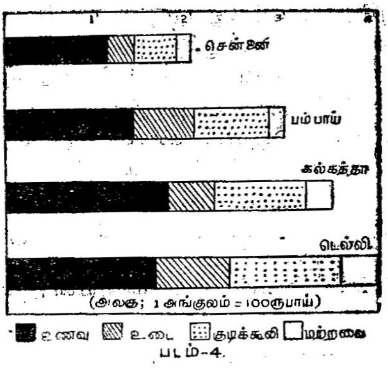
மாநிலப் பகுதி	செலவினங்கள்				மொத்தம்
	உணவு	உடை	குடிக்கூலி	மற்றவை	
சென்னை	55	15·0	22·5	7·5	100
பம்பாய்	45	22·5	27·5	5·0	100
டெல்லி	40	20·0	30·0	10·0	100
கல்கத்தா	50	14·0	28·0	8·0	100

(1) **பட்டை விளக்கப்படம் வரைதல் :** இங்கு ஒவ்வொரு பட்டையின் நீளம் மொத்தச் செலவைக் குறித்து, அதனுள்ளேயே செலவினங்களுக்குரிய பகுதிகளைப் பிரித்துக் காட்டல் வேண்டும்.

(2) **சதவீதப்பட்டை விளக்கப் படம் வரைதல் :** இங்கு ஒவ்வொரு பட்டையின் நீளம் நூற்றைக் குறிக்கும். ஒவ்வொரு பட்டையும் செலவினங்களைச் சதவீதத்தில் அறிவிக்கும் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படவேண்டும்.

பட்டை விளக்கப் படம்

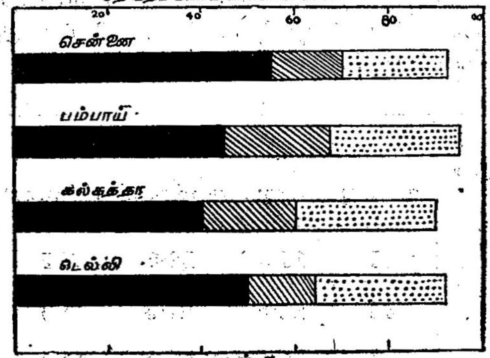
(அலகு நூறு ரூபாய்)



குறிப்பு :

படம்-4.

சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம்



படம்-5.

அலைவெண் பரவலின் வரைபட விளக்கம்

அலைவெண் பரவலின் அட்டவணை அந்தந்த பிரிவு இடைவெளிகளில் அமைந்திருக்கும் பிரிவு அலைவெண்களை வெளிப்படுத்துகிறது. பிரிவு இடைவெளிகளைப் பிரிவுக் குறிப்பெண்களாக் மாற்றி, அவைகளுக்கெதிரில் பிரிவு அலைவெண்களை அமைத்து, ஓர் அட்டவணை தயார் செய்துகொள்ளவும்.

பிரிவுக் குறிப்பெண்கள் வழியாகப் பிரிவு அலைவெண்களுக்கு ஏற்றவாறு உயரங்களையுடைய நிலைக்கோடுகளை வரைந்து, உண்டாகும் விளக்கப்படத்திற்கு அலைவெண் கோட்டு விளக்கப்படம் (Line Diagram) என்று பெயர்.

வரையும் விதம் : வரைபடத்தாளின் அடியில் படுகைக் கோடு அல்லது கிடைக்கோடு வரைந்து, அதற்கு x—அச்சு என்று பெயரிடவும். அதேபோல் இடதுபுற ஓரத்தில் செங்குத்தாக அல்லது நிலையாக ஒரு நேர்கோடு வரைந்து, அதற்கு y—அச்சு என்று பெயரிடவும். இரு அச்சுகளும் சேருமிடத்தை ‘O’ என்று குறிக்கவும். நிலைக் கோட்டில் பிரிவு அலைவெண்களைத் தகுந்த ஸ்கேல் எடுத்துக் குறிக்கவும். x—அச்சில் பிரிவுக் குறிப்பெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளின் வழியே, பிரிவு அலைவெண்களுக்குச் சரியான அளவை நிர்ணயிக்கும் நிலைக்கோடுகளை வரையவும். இக்கோடுகளைக் காட்டும் வரைபடத்தையே கோட்டு விளக்கப்படம் என்று சொல்லுகிறோம்.

$(x_r\ f_r)$, $r=1, 2, \ldots\ldots n$ என்பது x—மாறியின் அலைவெண்பரவலைக் குறிக்கட்டும். இதன் பரவல் ஒரே சீராக (symmetrical) அமைந்திருந்தால், கோட்டு விளக்கப்படத்திலுள்ள நிலைக்கோடுகள் நடுமையத்தில்

அமையும் நிலைக்கோட்டின் இருபுறங்களிலும் ஒரே சீராகச் சரிந்து கொண்டு போவதைக் காணலாம்.

அலைவெண் செவ்வகப்படம் (Histogram)

செவ்வகப் பட்டைகளை உண்மைப் பிரிவு இடைவெளிகளின் (True class-intervals) மேல் ஒன்றுக்கொன்று அருகில் பொருந்தி இருக்கு மாறும், அவைகளின் உயரங்கள் பிரிவு அலைவெண்களுக்குகந்தவாறும் வரையப்படும் படத்திற்கு அலைவெண் செவ்வகப் படம் என்று பெயர்.

வரையும் விதம் : கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் அலைவெண்பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளைத் தொடர்ச்சியான உண்மைப் பிரிவு இடை வெளிகளாக மாற்றி யமைத்து, அவைகளுக்கெதிரில் பிரிவு அலை வெண்களைக் குறித்து, ஓர் அட்டவணை தயார் செய்யவும். பிரிவு இடைவெளிகளின் வரம்புகளைத் தகுந்த ஸ்கேல் எடுத்து, x—அச்சில் அவைகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை அமைக்கவும். y-அச்சில் பிரிவு அலைவெண்களைத் தகுந்த ஸ்கேல் எடுத்துக் குறிக்கவும். உண்மைப் பிரிவு இடைவெளிகளைக் குறிக்கும் கோட்டின் மேல், பிரிவு அலை வெண்களுக்குகந்த உயரங்களைக்கொண்ட செவ்வகப் பட்டைகளை வரையவும். பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியாக இருப்பதால் செவ்வகப் படத்திலுள்ள பட்டைகள் ஒன்றுக்கொன்று அருகில் பொருந்தியிருக்கும்.

செவ்வகப் படத்தினுள் அடங்கியிருக்கும் பரப்பைப் பார்த்தால், அது பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணுக்குச் சமமாக அல்லது அதற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது என்று அறியலாம்.

பரவலிலுள்ள பிரிவு இடைவெளித் தூரங்கள் ஒரே சீரான அள வாக இருந்தால், செவ்வகப் படத்தின் பரப்பு, அலைவெண் கூடுதலுக் குச் சமமாகவோ, அதன் விகிதாசாரத்திற்கேற்றவாறோ இருக்கும். ஏனெனில் பட்டைகளின் அகலங்கள் x—அச்சில் ஒரு யூனிட் அளவா கவும், உயரங்கள் f_1, $f_2 \ldots f_n$ யூனிட் அளவாகவும் இருப்பதால், செவ் வகப்பட்டைப் படத்தின்

$$\text{பரப்பளவு} = (1 \times f_1) + (1 \times f_2) + \ldots\ldots + (1 \times f_n)$$
$$= f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_n.$$
$$= N$$

= அலைவெண்களின் கூடுதலாகும்.

அலைவுப் பலகோணம் (frequency polygon)

செவ்வகப் படத்தில் அமைந்துள்ள பட்டை ஒவ்வொன்றிலும், மேல் மட்டத்தின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். அடுத்தடுத்து வரும் புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் சேர்க்கவும். செவ்வகப் படத்தின் முதல் பட்டையின் மேல் மட்டத்தின் மையப் புள்ளியையும், கடைசிப் பட்டையின் மேல் மட்டத்தின் மையப் புள்ளியையும், x— அச்சில், பரவலின் முன்னும் பின்னும் பாவனையாக அமைத்த பிரிவு இடைவெளிகளின் பிரிவுக் குறிப்பெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுடன் சேர்த்து உண்டாகும் பலகோணத்திற்கு அலைவுப் பலகோணம் என்று பெயர்.

அலைவுப் பலகோணத்தைப் பின் வருமாறும் வரையலாம். அலைவெண்பரவலில் வரும் பிரிவு இடைவெளிகளைப் பிரிவுக் குறிப்பெண்களாக மாற்றியமைத்து, அவைகளுக்கெதிரில் பிரிவு அலைவெண்களைக் குறித்து ஓர் அட்டவணையைத் தயார் செய்யவும். வரைபடத்தாளில், x, y அச்சுகளை வரைந்து, பிரிவுக் குறிப்பெண்களைத் தகுந்த ஸ்கேல் எடுத்து x— அச்சில் புள்ளிகள் மூலம் குறிக்கவும். y—அச்சில் அலைவெண்களுக்குத் தகுந்த ஸ்கேல் எடுத்துப் புள்ளிகளைக் குறித்துக் கொள்ளவும். வரைபடத்தாளில் பிரிவுக் குறிப்பெண்களைக் கிடை (அச்சுத்) தூரங்களாகவும் (x— coordinates), பிரிவு அலைவெண்களை முறையே, நிலை (அச்சுத்) தூரங்களாகவும் (y— coordinates) கொண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். அடுத்தடுத்து வரும் புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் சேர்க்கவும். முதல்புள்ளியையும், இறுதிப் புள்ளியையும் முறையே x— அச்சில், பரவலின் முன்னும் பின்னும் பாவனை செய்து அமைக்கும் பிரிவுக் குறிப்பெண்களுக்குகந்த புள்ளிகளுடன் சேர்த்து உண்டாகும் பலகோணத்தையே நாம் அலைவெண் பலகோணம் என்று சொல்லுகிறோம்.

அலைவெண் வளைகோடு (frequency curve)

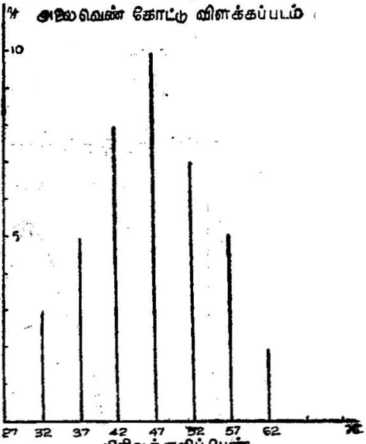
அலைவுப் பலகோணப் படத்தில் ஏறக்குறைய எல்லாக்கோணப் புள்ளிகளின் வழியாகக் கருவிகள் உதவியின்றிக் (without using any instrument) கையினாலேயே வரையும் வளைவுப் பாதைக்கு அலைவெண் வளைகோடு என்று பெயர்.

பிரிவு இடைவெளிகளது இடைத் தூரத்தைச் சிறிது சிறிதாகக் குறைத்துக்கொண்டே செல்வோமானால், பிரிவு இடைவெளிகள் அருகருகே நெருக்கமாக அமையும். அப்போது அலைவெண் பலகோணப் (முனை) புள்ளிகள் மிகமிக நெருக்கமாக அமையும். இம்முறையை மேற்கொண்டு கிடைக்கும் இறுதியான அலைவெண் பல

கோணத்தின் அமைப்பே அலைவெண் வளைகோடாகும். நடைமுறையில் கொடுத்த புள்ளிவிவரங்களுக்குரிய வரைபடம் பெரும்பாலும் அலைவெண் பலகோணமாகவே இருக்கும். ஆனால் கணக்கியல் ஆராய்ச்சியில் பலகோணத்திற்கு ஒத்த ஓர் இயல் நிலை வளைகோட்டினைப் (normal curve) பொருத்துவது வழக்கம். அப்போதுதான் விவரங்களனைத்தும் கணக்கியல் முறைக்கு உட்படுத்தப்பட்டுச் செய்திகளின் உட்கருத்தை ஊகித்தறிய முடியும்.

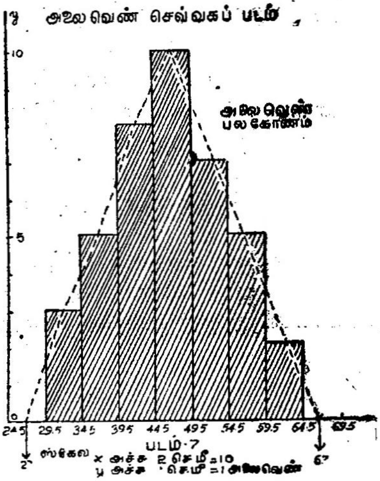
அலைவெண் வளைகோட்டுக்கும், x—அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பு, அலைவெண்களின் கூடுதலுக்கு நேர் விகிதத்திலோ, சமமாகவோ வரும் என்பதைக் காணலாம்.

பிரிவுக் குறிப் பெண்	பிரிவு அலை வெண்
32	3
37	5
42	8
47	10
52	7
57	5
62	2
மொத்தம்	40



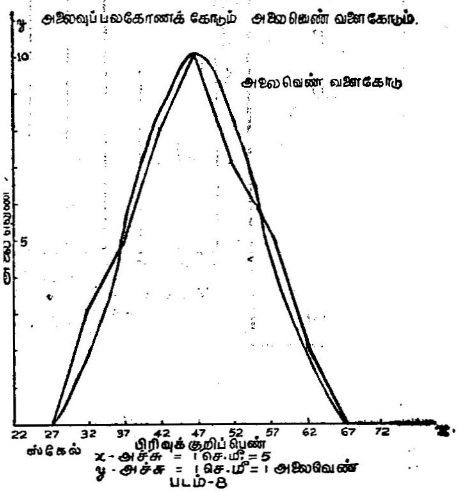
படம்-6

உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி	பிரிவு அலை வெண்
24·5—29·5	0
29·5—34·5	3
34·5—39·5	5
39·5—44·5	8
44·5—49·5	10
49·5—54·5	7
54·5—59·5	5
59·5—64·5	2
64·5—69·5	0
மொத்தம்	40



படம்-7

அலைவெண் செவ்வகப்படத்தின் பரப்பு
$= (1\times3)+(1\times5)+(1\times8)+(1\times10)+(1\times7)+(1\times5)+(1\times2)$
$= 3+5+8+10+7+5+2$
$= 40$
= அலைவெண்களின் கூடுதல்
வரைபட மூலம் அலைவுப் பலகோணத்தின் பரப்பு = செவ்வகப்படத்தின் பரப்பு.
= அலைவெண்களின் கூடுதல் என அறியலாம்.



படம்-8

குவிவு அலைவெண் பரவல்

அலைவெண் பரவலின் அட்டவணை, ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியில் அடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் (அலைவெண்ணை) காட்டுகிறது. குவிவு அலைவெண் பரவல் ஒரு குறித்த மதிப்பிற்குக் குறைந்த அல்லது அதிக மதிப்புகளை உடைய உறுப்புகளின் குவிவு அலைவெண்களைக் காட்டுகிறது.

அலைவுப் பரவலில் வரும் பிரிவு இடைவெளிகளை, அவைகளின் உண்மையான தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளாக மாற்றவும். பிறகு அந்தந்தப் பிரிவு இடைவெளிகளின் மேல் வரம்புகளுக்குள் மதிப்புகளையுடைய உறுப்புகளின் குவிவு அலைவெண்களை முறையே கணக்கிட்டு, அமைக்கப்படும் பரவலையே 'கீழ் இனக் குவிவு அலைவெண் பரவல்' (cumulative distribution of the less than type) எனக் கூறுகிறோம். அம்மாதிரியே அந்தந்தப் பிரிவு இடைவெளிகளின் கீழ் வரம்புகளுக்கு மேற்பட்ட அளவுகளுள்ள உறுப்புகளின் குவிவு அலைவெண்களை முறையே கணக்கிட்டால் ஏற்படும் பரவலை, 'மேல் இனக் குவிவு அலைவெண் பரவல்' (cumulative distribution of the greater than type) என்று சொல்லுகிறோம்.

அங்ஙனமே, x—அச்சில் கீழ் வரம்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைக் காட்டவும். y—அச்சில் அவைகளுக்குகந்த குவிவு அலைவெண்களைக் காட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். கீழ் வரம்பு எண்களைக் கிடை (அச்சு)த் தூரங்களாகவும், குவிவு அலைவெண்களை நிலை (அச்சு)த் தூரங்களாகவும் உடைய புள்ளிகளைக் குறித்து, அடுத்தடுத்து வரும் புள்ளிகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் பலகோண உருவத்தை 'மேல் இனக் குவிவு அலைவெண் பலகோணம்' என்று சொல்லுகிறோம்.

ஏறக்குறைய எல்லாக் கோணப் புள்ளிகளின் வழியாக வளைவுப் பாதைகளை, அவ்விரண்டு பல கோண உருவங்களின் மேல் பொருந்துமாறு கையினாலேயே வரையவும். இந்த இரண்டு வளைகோடுகளுக்கு முறையே 'கீழ் இன', 'மேல் இன' அலைவெண் குவிவு வளை கோடு அல்லது, ஓகைவ் (ogive) என்று பெயர்.

கீழே கொடுத்திருக்கும் அலைவெண் பரவலின் குவிவு அலைவெண் பலகோணங்களையும், ஓகைவ்களையும் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	30—34,	35—39,	40—44,	45—49
அலைவெண்	3	5	8	10
பிரிவு இடைவெளி	50—54,	55—59,	60—64,	மொத்தம்
அலைவெண்	7	5	2	40

பிரிவு இடைவெளிகளைத் தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளாக மாற்றி, அவைகளுக்கெதிரில் பிரிவு அலைவெண்களைக் காட்டும் ஓர் அட்டவணை தயார் செய்யவும். பிறகு 'கீழ் இன' 'மேல் இன'க் குவிவு அலைவெண் பரவல்களைக் காட்டும் அட்டவணைகளைத் தயார் செய்யவும்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
29·5 — 34·5	3
34·5 — 39·5	5
39·5 — 44·5	8
44·5 — 49·5	10
49·5 — 54·5	7
54·5 — 59·5	5
59·5 — 64·5	2
மொத்தம்	40

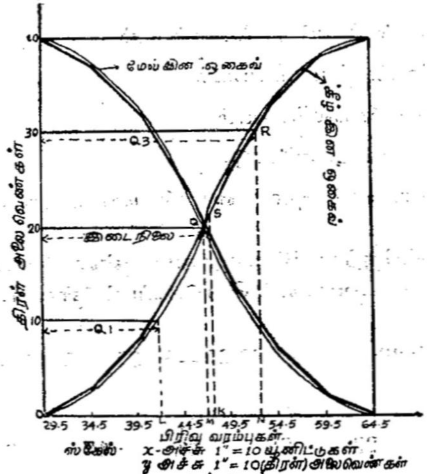
மேல்வரம்பு	மேல்வரம்புக்குள் மதிப்புகளையுடைய உறுப்புகளின் குவிவு அலைவெண்
29·5	0
34·5	3
39·5	8
44·5	16
49·5	26
54·5	33
59·5	38
64·5	40

கீழ்வரம்பு	கீழ்வரம்புக்கு மேல் மதிப்புகளையுடைய உறுப்புகளின் குவிவு அலைவெண்
29·5	40
34·5	37
39·5	32
44·5	24
49·5	14
54·5	7
59·5	2
64·5	0

நிலை அச்சுக் கோட்டில் 10, 20, 30 உள்ள குவிவு அலைவெண்களுக்குரிய புள்ளிகளின் வழியே கிடை அச்சுக்கு இணைகோடுகள் வரையவும். அவைகள் முறையே 'கீழ் இன', ஓகைவை P, Q, R என்ற இடங்களில் வெட்டட்டும். P, Q, R லிருந்து x-அச்சுக்கு PL, QM, RN எனச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். அவைகள் x-அச்சை L, M, N-என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். OL, OM, ON—களின் நீளங்களை அள. அவைகள் முறையே 'கீழ்க்கால் மானம்', 'இடை நிலை', 'மேல் கால் மானம்' ஆகியவற்றின் அளவுகளை வரைபடம் மூலம் விளக்குகின்றன.

'கீழ் இன', 'மேல் இன' ஓகைவ்கள் வரைந்து, அவைகள் வெட்டும் இடத்தை 'Q' எனக் குறிப்பிடு. Q-லிருந்து X-அச்சுக்கு QM என்ற செங்குத்துக் கோடு வரை. OM—இன் நீளத்தை அளக்கவும். அது வரைபடம் மூலம் 'பரவலின் இடைநிலை' அளவைக் குறிக்கிறது.

'கீழ் இன' ஓகைவ் வரைபடத்தில் பாதை குழிந்த வளைவிலிருந்து, குவிந்த வளைவுக்கு மாறும் புள்ளியை S-ஆல் குறிக்கவும். S-லிருந்து x-அச்சுக்கு SK என்ற லம்பம் வரைக. OK-இன் நீளத்தை அள. அது அலைவுப்பரவலின் முகட்டை வரைபடம் மூலம் விளக்குகிறது.



படம்-9

வரைபடத்திலிருந்து

Q_1 = கீழ்க் கால்மானம் = OL = 41·0
இடைநிலை .... = OM = 46·5
Q_3 = மேல் கால்மானம் = ON = 50·0
முகடு .... = OK = 47·0 என அறிகிறோம்.

பயிற்சி

(1) பின்வரும் அட்டவணையில் 50 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. பிரிவு இடைவெளிகளை (30—39); (40—49); .... என எடுத்து இதை ஓர் அலைவெண் பரவல் அட்டவணையாக அமைத்திடுக.

51	65	47	68	37	72	35	67	63	75
81	57	61	71	62	43	53	65	74	84
60	82	46	52	56	63	73	45	87	68
70	94	68	85	66	77	64	76	54	61
31	64	98	83	78	90	55	69	49	79

இப்பரவலுக்குரிய

(i) அலைவெண் கோட்டு விளக்கப்படம்

(ii) அலைவெண் செவ்வகப்படம்

(iii) அலைவெண் பலகோணம்

(iv) அலைவெண் வளைகோடு

(v) கீழ் இன, மேல் இன, ஒகைவ்—வரைபடங்களை வரைக.

(2) 5 வயதிலிருந்து, 10 வயது வரையுள்ள சிறுவர்களின் எடைகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடை (பவு.)	15—19	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44	மொத்தம்.
அலைவெண்	9	22	28	21	17	3	100

இப்பரவலின் செவ்வகப் படத்தை வரைக.

(3) ஒரு பல்கலைக்கழக இறுதித்தேர்வில் 121 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அலைவெண் பரவல் அட்டவணை பின்வருமாறு.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
35 க்குக்கீழ்	21
35—45	24
45—50	32
50—55	12
55—60	10
60—65	9
65—75	8
75 ம் அதற்கு மேலும்.	5

இப்பரவலின் கீழ் இன ஒகைவ் — வளைகோட்டை வரைந்து, அதிலிருந்து கீழ்க்கால் மானம், இடைநிலை, மேல் கால் மானங்களைத் தீர்மானிக்கவும்.

(4) 12 ஆசிரியர்களின் சராசரி உயரம் பின் வருமாறு:

66, 68, 67, 66, 64, 65, 66, 67, 66, 65, 67, 66, இதை ஓர் அலைவெண் பரவல் அட்டவணையில் அமைத்திடுக. இதன் அலைவுப் பலகோணத்தையும் வரைந்திடுக. ஆசிரியர்களின் சராசரி உயரத்தையும் கணக்கிடுக.

(5) ஒரு கோட்டின் நீளத்தை (அங்) 10 பேர் அளந்ததில் அவர்கள் பின்வரும் அளவுகளைத் தெரிவித்தனர்.

4·9, 4·7, 4·8, 4·6, 4·7, 4·8, 4·7, 4·6, 4·5, 4·7 ; இதனை ஓர் அலைவெண் பரவல் அட்டவணையாக மாற்றிடுக.

இப் பரவலின் அலைவெண் வளைகோட்டை வரைந்திடுக.

(6) பின்வரும் அட்டவணை, 500 மரங்களின் சுற்றளவுகளின் பரவலைத் தெரிவிக்கிறது.

சுற்றளவு (அங்.)	மரங்களின் எண்ணிக்கை.
15-25	25
25-35	30
35-45	135
45-55	160
55-65	100
65-75	40
75-85	10

இதன் செவ்வகப் படத்தை வரைக.

(7) புள்ளி விவரங்களை, வரைபடம் மூலம் விளக்குவதின் நோக்கம் என்ன? பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்குரிய வரைபடத்தை வரைக

வருட வருமானம் (ரூ-ல்).	தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கை.	வருட வருமானம் (ரூ-ல்).	தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கை.
1—100	10	401—500	146
101—200	54	501—600	36
201—300	184	601—700	6
301—400	264		

(8) அலைவெண் வளைகோட்டிற்கும், கீழ் இன ஒகைவிற்கும் உள்ள உறவை விளக்கு. 'ஒகைவ்' படத்தின் பயன்களை அறிவி. பின்வரும் பட்டியல், ஒரு கல்லூரி விடுதியிலிருக்கும் 100 மாணவர்களின் வயதின் பரவலைத் தெரிவிக்கிறது.

வயது	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	மொத்தம்.
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	3	13	23	32	18	9	2	100.

இப்பரவலின் 'கீழ் இன ஒகைவ்' படத்தை வரைந்து, அதிலிருந்து இடைநிலை, கால்மானங்கள் இவைகளைக் காண்க.

(9) முதலிரண்டு ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களில், இந்திய நாட்டின் முன்னேற்றத்திற்காக மூலதனங்களைச் செலவிட்ட வகைகளின் அட்டவணை பின் வருமாறு :—

செலவினங்கள்	முதல் திட்டம்	இரண்டாவது திட்டம்
வேளாண்மை, சமூக முன்னேற்றம்	372	565
நீர்ப்பாசனம், வெள்ளக்கட்டுப்பாடு	395	458
மின் உற்பத்தி	266	440
தொழில், கனிப் பொருள் உற்பத்தி	179	891
போக்குவரத்து, செய்தி அனுப்பும் துறைகள்	556	1,384
கட்டடம், சமூகத் தொண்டு	547	946
ஏனையவை	41	116

இச்செய்தியைக் கூட்டுப்பட்டை விளக்கப்படமாக அமைத்திடுக.

(10) ஒரு நாட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் சராசரியாக ஒரு வாரத்தில் தேயிலை, காப்பி, கோக்கோ—முதலானவற்றை அருந்துவதில் செலவழிந்த டன்கள் விவரம் பின்வருமாறு :

தேயிலை	3,250 டன்கள்
காப்பி	2,000 டன்கள்
கோக்கோ	750 டன்கள்

இதை ஒரு வட்ட விளக்கப்படமூலம் விளக்கிடுக.

(11) A, B என்ற இரு பட்டணங்களில் ஒவ்வொன்றிலும் ஓர் உழைப்பாளி குடும்பத்தின் சராசரி மாதாந்திரச் செலவினங்கள் பின் வருமாறு :

செலவினவகை	தொகை ரூபாயில் பட்டணம் A	பட்டணம் B
உணவு	45	40
விறகும், மற்ற எரி பொருள்களும்	7	8
ஆடை	9	4
குடிக் கூலி	15	6
மற்றவை	24	17
	100	75

இதற்குகந்த வரைபடங்களை வரைந்து விளக்குக.

(12) இரு மாகாண அரசாங்கத்தில் வசூலித்த வருட வருமான வகையரு கீழ்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

இவைகளைத் தகுதியான வரைபடங்கள் மூலம் விளக்கிடுக.

தோற்றுவாய்	வருமானம் (இலட்சத்தில்) மாகாணம் A	B
நிலவரி	40	20
உள்நாட்டுப் பொருள் வரி	10	12
வருமான வரி	20	14
விற்பனை வரி	10	12
போக்குவரத்து வரி	4	8
மற்றவை	16	4
மொத்தம்	100	70

(13) மாதிரித் தேர்வினுல் எடுக்கப்பட்ட 50 உயர் நிலைப் பள்ளிகளிலிருந்து S. S. L. C. இறுதித் தேர்வில் வெற்றி பெற்ற மாணவர்கள் எவ்விதத்தில் ஈடுபடுகிருர்கள் என்பதன் விவரம் கீழ்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	எண்ணிக்கை
ஆசிரியர் பள்ளியில் சேர்ந்தவர்கள்	50
பொறியியல் பயிற்சி நிலையத்தில் சேர்ந்தவர்கள்	450
பல்கலைக் கழகக் கல்லூரிகளில் சேர்ந்தவர்கள்	800
ஊதியம் பெறச் சென்றவர்கள்	1,200
மொத்தம்	2,500

இச்செய்தியை (i) கட்ட விளக்கப் படம் (ii) வட்ட விளக்கப் படம் மூலம் விளக்கிடுக.

(14) நான்கு மக்கட் தொகைக் கணிப்பு ஆண்டுகளில் ஒரு மாவட்டத்திலுள்ள மக்கட் தொகையைச் சமயச் சார்பாகப் பிரித்துக் காட்டும் அட்டவணை பின்வருமாறு. இதை விளக்க ஒரு சதவீதக் கட்ட விளக்கப் படம் ஒன்றை வரைந்திடுக.

சென்ஸஸ் ஆண்டு	இந்து	இஸ்லாம்	கிறித்துவம்	சீக்கியம்
1921	6,25,000	40,000	8,000	2,000
1931	7,50,000	35,000	6,000	4,000
1941	7,00,000	42,000	5,000	3,000
1951	7,25,000	15,000	3,000	2,500

(15) கீழ்வரும் செய்திகளுக்கு ஏற்ற பட்டியலை அமைத்திடுக.

(i) ஒரு நாட்டின் மக்கட் தொகுதியை, வயது, இனம், திருமணத்திற்குரிய நிலை (marital status) முதலானவைகளுக்கு ஏற்றவாறு பிரிப்பது.

(ii) மக்கட் தொகுதியை இனம், நல்லுணர்வு நிலைக்கு (sanity) ஏற்றவாறு பிரிப்பது.

(iii) ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள மக்களை இனம், தொழில் இவைகளுக்கு ஏற்றவாறு பிரிப்பது.

(iv) ஒரு நாட்டு மக்கட் தொகுதியை இனம், வயது, எழுத்தறிவு இவைகளுக்கு ஏற்றவாறு பிரிப்பது.

(v) மக்கட் தொகையை இனம், வயது, சமயம் இவைகளுக்கு ஏற்றவாறு பிரிப்பது.

5. சராசரிகள்

(Averages)

ஒரு தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் ஏற்கும் மதிப்புகளைச் சுருக்கமாகவும், எளிய முறையிலும், மனத்திற் புரிந்து கொள்ளும்படி எடுத்துக் காட்டும் அளவே சராசரியாகும். சராசரியை ஒரு கூட்டத்தின் சின்னமாகக் கருதலாம்.

ஒரு பகிர்வை விளக்கிக் காட்ட, அளவுமுறை விவரங்களை முறைப்படுத்திக் கூறவேண்டியது மிக அவசியம். இதில் சராசரிகள் அடிப்படைக் கோட்பாடுகளாக (fundamental principles) விளங்குகின்றன. எனவே, சராசரிகளை 'இருப்பிடத்தின் அளவுகள்' (measures of location) என்று கூறலாம். சராசரி அளவு பகிர்வின் நடுத்தர மதிப்பைக் குறிக்கக்கூடியதாகவும் உள்ளது. ஒரு மாறி (variable) ஏற்கும் மதிப்புகளை மொத்தத்தில் எடுத்துரைக்கும் அளவாகவும் உள்ளது. ஆயினும் சராசரி அளவு, குழுவிலுள்ள ஏதாவதொரு உறுப்பின் மதிப்பளவாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஆதலால் சராசரியை ஒரு பகிர்வின் மைய நிலைப் போக்கைத் தெரிவிக்கும் அளவாகக் (measures of central tendency) கருதலாம்.

ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் எந்த அளவுகோலைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப்பட்டிருக்கின்றனவோ, அதே அளவுகோலால்தான், அதன் சராசரியும் அளவிடப்பட்டிருக்க வேண்டும். உதாரணமாக, ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் அங்குலத்தில் குறிக்கப் பட்டிருந்தால், அதன் சராசரியையும் அங்குலத்திலேயே குறிப்பிட வேண்டும்.

சராசரியின் உபயோகங்கள் (Uses of the Averages)

(a) முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிச் சுருக்கமாக விளக்கப் பயன்படுகிறது.

(b) பல தொகுதிகளை ஒப்பிடுவதற்கு ஏதுவாக உள்ளது.

(c) முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்களை மாதிரியிலடங்கிய உறுப்புகளால் விவரிக்கப் பயன்படுகிறது.

(d) தொகுதிகளுக்குள்ள ஒற்றுமை, வேற்றுமைகளைக் கணக்கியலாக அறிவிக்கிறது.

சராசரிக்குரிய பண்புகள்

ஒரு சராசரியைத் திருப்திகரமானதாகக் கொள்வதற்கு, அந்தச் சராசரி கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

44637.4

(a) உறுதியாக விவரிக்கக் கூடிய விதியை யொட்டி வரையறுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(b) ஊகத்தால் மதிப்பிடப்பட்ட அளவாகயிருத்தல் கூடாது. ஏனெனில், ஊகமதிப்பு மதிப்பிடுகிறவர்களையும், அவர்களால் அளவிடப்படும் உறுப்புகளையும் சார்ந்திருக்கிறது.

(c) எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டிருக்க வேண்டும். அவ்வாறன்றிச் சராசரியைப் பகிர்வின் பிரதிநிதியாகக் கூறமுடியாது.

(d) சராசரியின் பொதுவான இயல்பை அறிந்து கொள்வதற்கு ஒரு சில எளியதும், தெளிவானதுமான (அல்லது வெளிப்படையாகத் தெரியக்கூடியதுமான) பண்புகளைச் சராசரியானது பெற்றிருத்தல் வேண்டும். எளிதில் புரிந்து கொள்ள முடியாத கணக்கியலுக்கு உட்படாமலிருத்தல் வேண்டும்.

(e) சுலபமாகவும், விரைவில் கணக்கிடக்கூடியதாகவும் இருத்தல் நலம்.

(f) மாதிரிகளின் (samples) ஏற்றத் தாழ்விற்கு உகந்தவாறு சராசரி எவ்வளவுக்கெவ்வளவு மிகக் குறைவாகப் பாதிக்கப்பட்டிருக்கின்றதோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு விரும்பத் தக்கது. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து (population), மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது, மாதிரிகளின் சராசரிகள் ஒரே மதிப்புள்ளனவாக அமைவது

அரிது. ஆயின் ஒருவகைச் சராசரி, மற்றொரு வகைச் சராசரியை விட அதிக வேறுபாட்டை வெளிப்படுத்தக் கூடும். இச் சராசரிகளில் எது மிகவும் உறுதியாக உள்ளதோ அதை ஏற்றுக்கொள்வது நலம்.

(g) சராசரியின் சூத்திரம் மேலும் மேலும் கணக்கியல் முறைக்கு இணக்கமாக இருத்தல் வேண்டும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாதிரித் தேர்வுகளிலடங்கிய உறுப்புகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அம்மாதிரிகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் கலவைக்கூறின் சராசரி, அம்மாதிரிகளின் சராசரிகளால் நிர்ணயிக்கக் கூடியதாக இருத்தல் வேண்டும்.

குறியீடு (Notation) : x என்பது ஒரு மாறியைக் குறித்தால், $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ என்பன x ன் ஏதாவது n-மதிப்புகளைக் குறிப்பிடுகின்றன. இம்மதிப்புகளின் கூடுதல் $x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n$ ஆகும். இக்கூடுதலைச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிட, பொதுவாகக் கூடுதலை எடுத்துக் காட்டும் "Σ" என்கின்ற கிரேக்க எழுத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம். ஆகவே, $x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$

'Σ' என்ற குறியீடு, கணக்கியல் முறைகளை எளிதாக்கும் கருவியாக (operator) உள்ளது. $\sum_{i=1}^{n}$ என்ற குறியீடு, ஏதாவது குறித்த மாறி அளவின் முன் வருமானால், 'i—க்கு முறையே முழு எண் ஒன்றிலிருந்து, முழு எண் n-வரை மதிப்பளித்து, அவைகளுக்கேற்ற உறுப்புகளின் மதிப்புகளைக் கூட்டவேண்டும்' என்பதைத் தெரிவிக்கிறது. ஆக, x_i-என்பது, x-மாறியின், i-வது உறுப்பின் மதிப்பைத் தெரிவித்தால், x_1 என்பது, x-ன் ஒன்றாவது மதிப்பையும், x_2 என்பது x-ன் இரண்டாவது மதிப்பையும்,... x_n என்பது x-ன் n-வது மதிப்பையும் தெரிவிக்கிறது. $\sum_{i=1}^{n} x_i$-என்பது x-ன் n-உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைத் தெரிவிக்கிறது.

சில விளக்கங்கள் :

$$\sum_{i=1}^{n} 5x_i = 5x_1 + 5x_2 + \dots\dots\dots\dots + 5x_n.$$

$$= 5(x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots\dots + x_n)$$

$$= 5\sum_{i=1}^{n} x_i$$

அதேபோல,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}.\, x_i = \mathrm{K}. \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{k} = \mathrm{k} + \mathrm{k} + \mathrm{k} + \mathrm{k} + \dots\dots\dots\dots$$

$$= n\mathrm{k}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots\dots\dots + (x_n + y_n).$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots\dots\dots + y_n).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + x_n f_n.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + x_n^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i \pm z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i \pm \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

வழக்கத்தில், ஐவகையான சராசரிகளைக் கையாளுகின்றோம். அவையாவன : (i) கூட்டுச் சராசரி (or கூட்டிடை) (Arithmetic mean); (ii) இடைநிலை (median); (iii) முகடு (Mode); (iv) பெருக்குச் சராசரி (or பெருக்கிடை) (Geometric mean); (v) ஹார்மானிக் சராசரி (Harmonic mean). இவைகளில் முதல் மூன்றும், புள்ளியியலில் முக்கியத்துவம் பெற்றிருக்கின்றன. கடைசி யிரண்டிற்கும், கணக்கியலில்தான் முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic mean): உறுப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை, மொத்த உறுப்புகளால் வகுத்து வரும் எண் கூட்டுச் சராசரி எனப்படும்.

$\bar{x}$-என்பது x-மாறியின் n-உறுப்பு மதிப்புகளின் ($x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$) கூட்டுச் சராசரியைக் குறித்தால்,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic mean of a frequency distribution) : ஓர் அலைவுப் பரவல், ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியிலும் அடங்கியுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கொடுக்கிறது. ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியிலுமுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பிரிவு அலைவெண் (Class frequency) எனக் கொள்கிறோம். அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண, அலைவெண்கள் பிரிவு இடைவெளிகளின் நடு மதிப்புகளில் குவிந்திருப்பதாகக் கொள்கிறோம். உதாரணமாக ஓர் அலைவுப் பரவலில், $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்பன பிரிவு அலைவெண்களைக் குறிக்கட்டும். $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பன பிரிவு இடைவெளிகளின் (Class interval) நடு மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். ஆதலால் பரவலில்,

x_1 அளவுள்ள f_1 உறுப்புகள் ;

x_2 அளவுள்ள f_2 உறுப்புகள் ;

....

....

x_n அளவுள்ள் f_n உறுப்புகள், உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது.

$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots f_n x_n$—என்பவை, உறுப்புகளின் மொத்த மதிப்பளவையும், $f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n$ என்பவை, உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன. ஆதலால்,

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n}.$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i x_i, \left[\sum_{i=1}^{n} f_i = N. = \text{அலைவெண்களின் கூடுதல் total frequency} \right]$$

ஆகும்.

சூத்திரம் : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i.}$

மாதிரி : 85, 79, 74, 75, 86, 90, 78 ஆகிய எண்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

$$\bar{x} = \frac{85+79+74+75+86+90+78}{7} = \frac{567}{7} = 81.$$

$$\therefore \boxed{\bar{x} = 81}$$

சுலபமுறையில் கூட்டிடையைக் கணக்கிடும் விதம் : கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் எண்கள், மதிப்புகளில் அதிக மாறுபாடில்லாமலிருந்தால், ஏதாவது ஓர் எண்ணைக் கூட்டுச் சராசரியின்

தோராயமாகக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் ஒவ்வொரு எண்ணும் தோராய மதிப்பிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும் அளவுகளின் கூடுதலின் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, தோராய மதிப்புடன் கூட்டவோ, கழிக்கவோ வேண்டும்.

இதைக் கீழ்க் கண்ட அட்டவணையின் மூலம் அறியலாம்.

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் எண்	தோராயம்	தோராய மதிப்பிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் எண்களின் வேறுபாடுகள்			
		+		—	
85	80	5		...	
79	80	...		1	
74	80	...		6	
75	80	...		5	
86	80	6		...	
90	80	10	21	...	14
78	80	...		2	
		(21—14)=7.			

மொத்த வேறுபாடு $= 21 - 14 = 7.$

$\therefore$ சராசரி வேறுபாடு $= 7 \div 7 = 1.$

$\therefore$ சரியான கூட்டுச் சராசரி $= 80 + 1 = 81.$

$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ என்பன x-ன் n மதிப்புகளையும், $\bar{x}$, x-ன் கூட்டிடையையும் குறிக்கட்டும். 'a'-ஐத் தோராய மதிப்பாகக் கொள்ளவும்.

$$\therefore \quad \boxed{\bar{x} = a + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (x_r - a)}$$

என்ற சூத்திரத்தின் மூலம் கூட்டிடையைச் சுலபமாகக் கணக்கிடலாம்.

அலைவுப் பரவலின் கூட்டிடையைக் கணக்கிடும் முறை (to find the arithmetic mean of a frequency distribution) :

மாதிரி : கீழ்க்காணும் அலைவுப் பரவலின் கூட்டிடையைக் காண்.

எடை பவுண்டில் (x) :	74	75	78	79	85	86	88	மொத்தம்
அலைவெண் (f) :	3	4	5	8	6	3	1	30.

x_r	f_r	$x_r . f_r.$
74	3	222
75	4	300
78	5	390
79	8	632
85	6	510
86	3	258
88	1	88
மொத்தம்	30	2,400

சூத்திரம் : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_r f_r.$

$= \frac{1}{30} \times 2,400$

$= 80$ பவு.

$\therefore \boxed{\bar{x} = 80}$ பவு.

சுலப முறையில் கணக்கிடும் விதம் : ஓர் அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட, அட்டவணையில் காணும் உச்ச அலைவெண்ணிற்குரிய, உறுப்பின் மதிப்பைத் தோராயமாகக் கொண்டு, இதிலிருந்து ஒவ்வொரு உறுப்பின் மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை, அந்தந்த உறுப்பிற்குரிய அலைவெண்ணாற் பெருக்கி வரும்

கூடுதலின் சராசரியைத் தோராய மதிப்புடன் தக்கவாறு கூட்டவோ, கழிக்கவோ வேண்டும்.

x_r	f_r	A	x_r—A	f_r (x_r—A) +	f_r (x_r—A) —
74	3	79	—5		15
75	4	79	—4		16
78	5	79	—1		5
79	8	79	0	0	
85	6	79	6	36	
86	3	79	7	21	
88	1	79	9	9	
மொத்தம்	30	...	...	66 − 36 = 30	

$$\text{சரியான கூட்டிடை} = 79 + \frac{1}{30} \times 30$$

$$= 79 + 1 = 80$$

$\therefore \bar{x} = 80$ பவுண்டு.

சூத்திரம் : தோராய மதிப்பு $= A$

r-வது உறுப்பின் மதிப்பு $= x_r$.

தோராய மதிப்பிலிருந்து r-வது உறுப்பு மதிப்பின் வேறுபாடு $\} = x_r - A$.

r வது அலைவெண் $= f_r$.

$\therefore$ r-வது உறுப்பிற்குரிய மொத்த வேறுபாடு $\} = f_r\,(x_r - A)$

$$\therefore \text{வேறுபாடுகளின் மொத்தம்} = \sum_{r=1}^{n} f_r\,(x_r - A)$$

$\therefore$ வேறுபாடுகளின் சராசரி $= \frac{1}{N} . \sum_{r=1}^{n} f_r(x_r - A)$

$\therefore$ அலைவுப்பரவலின் கூட்டியைக் ($\bar{x}$) கணக்கிட உபயோகிக்கும்

சூத்திரம் :

$$\boxed{\bar{x} = A + \frac{1}{N} . \sum_{r=1}^{n} f_r \, (x_r - A)}$$

நிரூபணம் : R. H. S. $= A + \frac{1}{N} . \sum_{r=1}^{n} f_r \, (x_r - A)$

$$= A + \frac{1}{N} . \Big[f_1 \, (x - A)$$

$$+ f_2 \, (x_2 - A) + \ldots\ldots + f_n \, (x_n - A) \Big]$$

$$= A + \frac{1}{N} \Big[f_1 \, x_1 + f_2 \, x_2 + \ldots$$

$$+ f_n \, x_n - A \, (f_1 + f_2 + \ldots f_n) \Big]$$

$$= A + \frac{1}{N} . \Big[\sum f_r \, x_r - AN. \Big]$$

$$= \not{A} + \frac{1}{N} . \sum f_r \, x_r - \not{A}$$

$$= \frac{1}{N} . \sum f_r \, x_r .$$

$$= \bar{x} .$$

$$= \text{L. H. S.}$$

இச் சூத்திரத்திலிருந்து நாம் அறியும் உண்மை யாதெனின், தோராய மதிப்பைக் கூட்டிடையாகக் கொண்டால், எடை எடுத்த வேறுபாடுகளின் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

ஏனெனில் எடை எடுத்த வேறுபாடுகளின் கூடுதல் $\Big\} = \sum f_r \, (x_r - A).$

தோராய மதிப்பு 'A' ஐக்கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்டால்,

(*i.e.* $\bar{x}$) எடை எடுத்த வேறுபாடுகளின் கூடுதல். $\Big\} = \Sigma f_r (x_r - \bar{x})$

$$= \Sigma f_r x_r - \bar{x} \Sigma f_r.$$

$$= N \bar{x} - \bar{x} N.$$

$$= 0.$$

ஓர் அலைவுப் பரவலின் அட்டவணையில் பிரிவு இடைவெளிகள் (Class interval) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அவைகளைப் பிரிவுக் குறிப்பெண் (Mid value) களாக மாற்றிக்கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரி :

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவுக் குறிப் பெண்	அலை வெண்	$x_r . f_r$
30 — 34	32	3	96
35 — 39	37	5	185
40 — 44	42	8	336
45 — 49	47	10	470
50 — 54	52	7	364
55 — 59	57	5	285
60 — 64	62	2	124
மொத்தம்		40	1,860

சூத்திரம் :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \Sigma f_r x_r$$

$$= \frac{1}{40} \times 1860$$

$$= 46{\cdot}5$$

$$\boxed{\bar{x} = 46{\cdot}5}$$

ஒரே சீரான பிரிவு இடைவெளிகளுக்குள்ள அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைச் சுலபமுறையில் கணக்கிடும் விதம்.

ஒரே சீரான பிரிவு இடைவெளிகளுக்குள்ள இடைத்தூரத்தை C—எனக் கொள்வோம். உச்ச அலைவெண்ணிற்குரிய பிரிவுக் குறிப்பெண்ணை A எனக் கொள்வோம். (x_r, f_r), $r = 1, 2, \ldots\ldots n$, என்பது ஓர் அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கட்டும்.

$u_r = \frac{x_r - A}{C}$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டுப் பிரிவுக் குறிப்பெண்களை (x_r-களை), u_rகளாக மாற்றியமைக்கவும்.

'$\bar{x} = A + \frac{1}{N} \cdot \Sigma f_r u_r \times C$' என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $\bar{x}$-ஐக் கணக்கிடவும்.

மாதிரி: முன் எடுத்துக்கொண்ட அலைவுப் பரவலில், பிரிவு இடைவெளிகள் ஒரே சீராக அமைந்திருக்கின்றன. பிரிவு இடைவெளித்தூரம், C=5. உச்ச அலைவெண்=10. ஆகவே, தோராய மதிப்பு A=47. N=40.

$$\therefore\ u_r = \frac{x_r - 47}{5}$$

பின்வரும் அட்டவணையைத் தயார் செய்யவும்.

x_r	f_r	$u_r = \frac{x_r - 47}{5}$	$u_r . f_r$ +	$u_r . f_r$ −
32	3	−3		9
37	5	−2		10
42	8	−1		8
47	10	0	0	
52	7	1	7	
57	5	2	10	
62	2	3	6	
மொத்தம்	40	...	23−27=−4	

$$\bar{x} = A + \frac{1}{N} \cdot (\Sigma f_r u_r) . C.$$

$$= 47 + \frac{1}{40} \times -4 \times 5$$

$$= 47 - \tfrac{1}{2}.$$

$$= 47 - 0{\cdot}5$$

$$= 46{\cdot}5.$$

$$\therefore\ \boxed{\bar{x} = 46{\cdot}5}$$

$\bar{x} = A + \frac{1}{N}(\Sigma f_r u_r) . C.$ என்ற சூத்திரத்தை நிரூபிக்க :—

நிரூபணம் : $u_r = \frac{x_r - A}{C}$.

$\therefore \ Cu_r = x_r - A.$

$ie. \ x_r = A + C u_r.$

$f_r x_r = A f_r + C u_r . f_r.$

$\therefore \ \Sigma f_r x_r = \Sigma A f_r + \Sigma C . u_r . f_r.$

$= A \ \Sigma f_r + C . \Sigma u_r . f_r.$

$= A . N + C . \Sigma u_r f_r.$

$ie. \ \frac{1}{N} \Sigma f_r x_r = A + \frac{1}{N} (\Sigma f_r u_r .) C.$

$\therefore \ \bar{x} = \frac{1}{N} \Sigma f_r . x_r . = A + \frac{1}{N} (\Sigma f_r . u_r .) C.$

கூட்டிடைகளின் கூட்டிடை (Arithmetic mean of the combined group):

x_1-என்ற மாறி $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots\ldots x_{1n_1}$ என்ற n_1 மதிப்புகளைக் கொண்டால், $\bar{x}_1$-ஆனது,

$$\bar{x}_1 = \frac{x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{1n_1}}{n_1} = \frac{1}{n_1} . \sum_{r=1}^{n_1} x_{1r} .$$

ஆகும். அதே போல, x_2 என்ற மாறி, $x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots x_{2n_2}$ என்ற n_2 மதிப்புகளைக் கொண்டால், அதன் கூட்டிடையை ($\bar{x}_2$ஐ) $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{r=1}^{n_2} x_{2r}$ என்ற சூத்திரம் கணக்கிடுகிறது.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, n_1, n_2$-என்பன முறையே இரு பண்புக் கூறுகளின் கூட்டிடை, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகளைத் தெரிவித்தால், பண்புக் கூறுகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் கூறின் கூட்டிடை ($\bar{x}$-ஐ), $\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$ என்னும் சூத்திரம் தெரிவிக்கிறது.

நிரூபணம் : $\bar{x}_1 = \frac{\Sigma x_{1r}}{n_1}$, $\therefore n_1\bar{x}_1 = \Sigma x_{1r}$.

$$\bar{x}_2 = \frac{\Sigma x_{2r}}{n_2}, \therefore n_2\bar{x}_2 = \Sigma x_{2r}.$$

$$\therefore n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 = \Sigma x_{1r} + \Sigma x_{2r}$$

ஆனல் $(n_1+n_2)\bar{x} = \sum_{r=1}^{n_1+n_2} x_r$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n_1+n_2} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

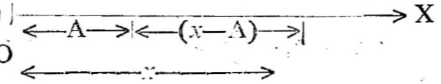
$(\bar{x}_r, n_r)$, $r=1, 2, 3, \ldots\ldots k$ என்பன முறையே, k-பண்புக் கூறுகளின் கூட்டிடைகளேயும், உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகளேயும் குறித்தால், k பண்புக் கூறுகளேச் சேர்த்து உண்டாகும் கூறின் கூட்டிடை $\bar{x}$-ஐ, $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \ldots\ldots + n_k\bar{x}_k}{n_1+n_2+\ldots\ldots n_k}$ என்ற சூத்திரத்தின் உதவியால் அறியலாம்.

$$\therefore \quad \boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{k} n_r\bar{x}_r, \ N = n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_k}$$

$u = \frac{x-A}{C}$ என்ற சமன்பாட்டின் ஜியோமிதி விளக்கம் :

x, u என்ற இரண்டு மாறிகளின் தொடர்பை, $u = \frac{x-A}{C}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் வரையறுக்கிறேம். இம் மாறிகளின் உறவை, ஜியோமிதி மூலம் விளக்கிக் கூறுவோம்.

அருகிலுள்ள வரைபடத்தில் x-ன் மதிப்புகளே, X அச்சில், O-ஐ ஆதாரமாகக் கொண்டு



அளக்கப்பட்ட தூரங்களுக்குகந்த புள்ளிகள் தெரிவிக்கின்றன. அதேபோல, 'A' யின்மதிப்பை, O-விலிருந்து 'A' தூரமுள்ள புள்ளி

குறிக்கிறது. O-வை ஆதாரமாகக் கொண்டு, x-ன் மதிப்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை, A-யின் மதிப்பைக் குறிக்கும் புள்ளியை ஆதாரமாகக் கொண்டு அளவிட்டால், அவைகளின் மதிப்புகளை $(x—A)$ கொடுக்கும். உதாரணமாக, O-ஐ ஆதாரமாகக் கொண்டு, A-யின் மதிப்பு 47-ஆகவும், x-ன் ஏதாவது ஒரு மதிப்பு 32 ஆகவும் இருந்தால் A-வை ஆதாரமாகக் கொண்டு அளவிடும்பொழுது, இதன் மதிப்பு 37—47= —10 என ஆகிறது. x, $(x—A)$ மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே அளவுகோலின் உதவியால் வெளியிடப்பட்டிருக்கும் என்பதைக் கவனத்திற் கொள்ளவேண்டும். அதாவது x-ன் மதிப்புகள் அங்குலத்தில் இருந்தால் $(x—A)$ யின் மதிப்புகளும் அங்குலத்திலேயே இருத்தல் வேண்டும். ஆனல் $\frac{x—A}{12}$ என்பது அடி அளவால் தெரிவிக்கப்படுகிறது. 12-ஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக $(x—A)$-ஐ, C-ஆல் வகுத்தால், $\frac{x—A}{C}$ என்பது C-யின் அலகு அளவால் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கும். $\frac{x—A}{C}$ ஐ, u என்ற மற்றொரு மாறியாக பாவிக்கிறோம். ஆதலால் $\frac{x—A}{C}$ என்ற பின்னத்தில், தொகுதி, ஆதார மையத்தை மாற்றுகிறதே தவிர, மாறியின் அலகு அளவுகோலைப் பாதிப்பதில்லை. ஆனல், பகுதி எண், அலகு அளவுகோலை மாற்றுகிறது. அதாவது u-மாறியின் அலகு அளவுகோல் x-மாறியின் அலகு அளவுகோலின் C-மடங்கிற்குச் சமம்.

ஓர் அலைவுப்பரவலின் கூட்டிடைடையைச் சுலப முறையில் கணக்கிடும்பொழுது படிப்படியாகச் செய்ய வேண்டியவைகள் :

(a) அலைவுப் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளை, அவற்றின் பிரிவுக் குறிப்பெண்களாக மாற்றவேண்டும்.

(b) உச்ச அலைவெண்ணிற்குகந்த பிரிவுக் குறிப்பெண்ணை ஆதார மையமாகக் கொள்ளவேண்டும்.

(c) பிரிவு இடைவெளிகள் ஒரே சீரான இடைத்தூரங்களைப் பெற்றிருந்தால், அந்த இடைவெளித்தூரங்களை C-எனக் குறித்துக் கொள்ளவும்.

(d) x-ன் மதிப்புகளை, $u = \frac{x-A}{C}$ என்னும் சூத்திரத்தைக் கொண்டு, u-ன் மதிப்புகளாக மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்.

(e) u-ன் மதிப்புகளை அவைகளுக்குகந்த பிரிவு அலைவெண்களால் பெருக்கிவரும் கூடுதலைக் கணக்கிடவேண்டும்.

(f) அலைவுப் பரவலின் கூட்டிடையைப் பின்வரும் சூத்திரத்தைக் கொண்டு கணக்கிடவேண்டும். $\bar{x} = A + \frac{1}{N} \cdot \Sigma f_r . u_r . C.$

மாதிரி:

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் 90 மாணவர்களின் உயர அலைவுப் பரவலின் கூட்டிடையைக் காண்:

உயரம் (அங்.) :	52	55	58	61	64	67	மொத்தம்.
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	19	26	20	12	5	90

இங்கு $C=3$; $A=58$; $\therefore u = \frac{x-58}{3}$

பின்வரும் அட்டவணையைத் தயார் செய் :

x_r	f_r	$u_r = \frac{x_r - 58}{3}$	$f_r . u_r$ +	$f_r . u_r$ −
52	8	−2		16
55	19	−1		19
58	26	0	0	
61	20	1	20	
64	12	2	24	
67	5	3	15	
மொத்தம்	90	...	59-35=24	

$$\bar{x} = A + \frac{1}{N} \cdot \Sigma f_r . u_r . C \cdot$$

$$= 58 + \frac{1}{90} \times 24 \times 3 = 58 + 0{\cdot}8$$

(90 and 24 cancelled to 5 and 4; 3 cancelled)

$$= 58{\cdot}8 \text{ அங்.}$$

$$\therefore \bar{x} = 58{\cdot}8 \text{ அங்.}$$

2. மாணுக்கர்களின் I.Q.-வின் (Intelligence Quotient) பரவலி லிருந்து, கூட்டிடையைக் காண்:

x:	55-64,	65-74,	75-84,	85-94,	95-104,	105-114,	115-124,	125-134,	135-144.
f:	1	2	9	22	33	22	8	2	1

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவுக் குறிப் பெண் x_r.	அலைவெண் f_r.	$u_r = \frac{x_r - 99\cdot5}{10}$	$f_r . u_r$. +	$f_r . u_r$. −
55—64	59·5	1	−4		4
65—74	69·5	2	−3		6
75—84	79·5	9	−2		18
85—94	89·5	22	−1		22
95—104	99·5	33	0		0
105—114	109·5	22	1	22	
115—124	119·5	8	2	16	
125—134	129·5	2	3	6	
135—144	139·5	1	4	4	
மொத்தம்	...	100	...	48-50=−2	

A=99·5.

C=10.

N=100.

$$\bar{x} = A + \frac{1}{N} \Sigma f_r . u_r \, C.$$

$$= 99\cdot5 - \frac{2 \times \cancel{10}}{\cancel{100}_{\,5}}$$

$$= 99\cdot5 - 0\cdot2$$

$$= 99\cdot3.$$

$\therefore$ $\bar{x} = 99\cdot3$

3. 100 மாணவர்கள் கணிதப் பரீட்சையில் வாங்கியிருக்கும் மதிப்பெண்களின் அலைவெண் பரவலிலிருந்து, கூட்டிடை மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடவும்.

x:	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
f:	1	2	9	22	33	22	8	2	1

பிரிவு இடைவெளி	பிரிவுக் குறிப்பெண் x_r.	பிரிவு அலைவெண் f_r	$u_r = \frac{x_r - 44\cdot5}{10}$	$f_r . u_r$. +	$f_r . u_r$. —
0— 9	4·5	1	—4		4
10—19	14·5	2	—3		6
20—29	24·5	9	—2		18
30—39	34·5	22	—1		22
40—49	44·5	33	0	0	
50—59	54·5	22	1	22	
60—69	64 5	8	2	16	
70—79	74·5	2	3	6	
80—89	84·5	1	4	4	
மொத்தம்	...	100	...	48-50=—2	

$A = 44\cdot5. \quad u_r = \frac{x_r - 44\cdot5}{10}$

$C = 10.$

$N = 100.$

$\bar{x} = A + \frac{1}{N} . \Sigma f_r . u_r . C.$

$= 44\cdot5 - \frac{\cancel{2} \times \cancel{10}}{\underset{5}{\cancel{100}}}$

$= 44\cdot5 - 0\cdot2$

$= 44\cdot3$

$\therefore \boxed{\bar{x} = 44\cdot3}$

4. (*a*) $\bar{x} = \frac{1}{N} \Sigma x_r$—என்ற சூத்திரத்தை உபயோகித்து 80, 88, 95, 68, 73, 75, 78, 70, 79, 84 ஆகிய எண்களின் கூட்டிடையைக் காண்.

(*b*) கூட்டிடையிலிருந்து 4 (*a*)-ல் கொடுத்துள்ள எண்களுக்குள்ள வேறுபாடுகளின் கூடுதல் பூஜ்யமாகிறது என்பதைச் சரிபார்க்கவும். இது எத்தேற்றத்தை விளக்குகிறது?

(*c*) 78-லிருந்து 4 (*a*)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வேறுபாடுகளைக் காண். அவ்வித வேறுபாடுகளின் சராசரியுடன், 78-ஐக் கூட்டி வரும் எண், கூட்டிடையின் மதிப்பைக் கொடுக்கிறதா எனச் சரிபார்க்கவும்.

4. (*a*) $\bar{x}=\dfrac{80+88+95+68+73+75+78+70+79+84}{10}$

$$=\frac{790}{10}=79.$$

(*b*) $\Sigma(x_r-\bar{x})=(80-79)+(88-79)+(95-79)+(68-79)+(73-79)+(75-79)+(78-79)+(70-79)+(79-79)+(84-79)$

$=1+9+16-11-6-4-1-9+0+5$

$=31-31=0.$

(*c*) $\Sigma(x_r-78)=2+10+17-10-5-3+0-8+1+6$

$= 36-26=10.$

$$\frac{1}{N}.\Sigma(x_r-78)=\frac{10}{10}=1.$$

$$\therefore\ 78+\frac{1}{N}.\ \Sigma(x_r-78)=78+1=79.$$

$$\therefore\quad \boxed{\bar{x}=79}$$

5. ஒரு கல்லூரியில் 900 மாணவர்களும், 100 மாணவிகளும் இருக்கிறார்கள். மாணவ, மாணவிகளின் சராசரி எடை முறையே 105 பவுண்டு, 110 பவுண்டு என்றால் கல்லூரி மாணவ மாணவிகளின் சராசரி எடை என்ன ?

$n_1=900$; $\bar{x}_1=105$ பவு. ; $n_2=100$; $\bar{x}_2=110$ பவு.

$$\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}=\frac{900\times105+100\times110}{1000}\text{ பவு.}$$

$$=\frac{94500+11000}{1000}\text{ பவு.}=\frac{105500}{1000}\text{ பவு.}=105.5\text{ பவு.}$$

$$\therefore\quad \boxed{\bar{x}=105\cdot5\text{ பவு.}}$$

இடைநிலை (Median) :— உறுப்புகளை, அவைகளின் மதிப்பிற்குத் தக்கவாறு ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்து, நடு மையத்தில் அமையும் உறுப்பின் மதிப்பளவை, இடைநிலை (Median) என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

x-ன் N மதிப்புகளை, x_1, x_2,......x_n என்பன குறிக்கட்டும். இம்மதிப்புகளெல்லாம் அளவையில் மாறுபட்டோ, மாறுபடாமலோ இருக்கலாம். இவைகள் $x_1 \leq x_2 \leq ...... \leq x_n$ என்ற ஏறு வரிசையில் அமைவதாக வைத்துக்கொள்வோம். N-உறுப்புகளில் எந்த உறுப்பு $\frac{N+1}{2}$ வது இடத்தில் அமைகிறதோ, அந்த உறுப்பின் மதிப்பளவை, உறுப்புகளின் 'இடைநிலை' யாகக் கருதுகிறோம். உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையானால், அதாவது $N=2k-1$ ஆனால், $\frac{N+1}{2}=\frac{2k-1+1}{2}=k$-வது இடம், (ஸ்தானம்) மத்திய இடத்தைக் குறிப்பிடுகிறது. k-வது இடத்தில் அமையும் உறுப்பின் மதிப்பு x_k. ஆகவே இடைநிலையை x_k-ன் மதிப்பு அளவிடுகிறது. உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையானால், அதாவது $N = 2k$ ஆனால், $\frac{N+1}{2}=\frac{2k+1}{2}=(k+\frac{1}{2})$-வது இடம், மத்திய இடத்தைக் குறிக்கிறது. அதாவது மத்திய இடம் k, $(k+1)$-வது இடங்களின் இடையில் அமைகிறது. அல்லது, k, $(k+1)$-வது இடங்கள் இரண்டையுமே, மைய இடங்களாகக் கருதலாம். இவ்விடங்களில் வரும் உறுப்புகளின் மதிப்புகள் x_k, x_{k+1} ஆகும். நடைமுறையில் இவ்விரு மதிப்புகளின் சராசரியை, அதாவது $\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ ஐ, இடைநிலை அளவாகக் கருதுகிறோம்.

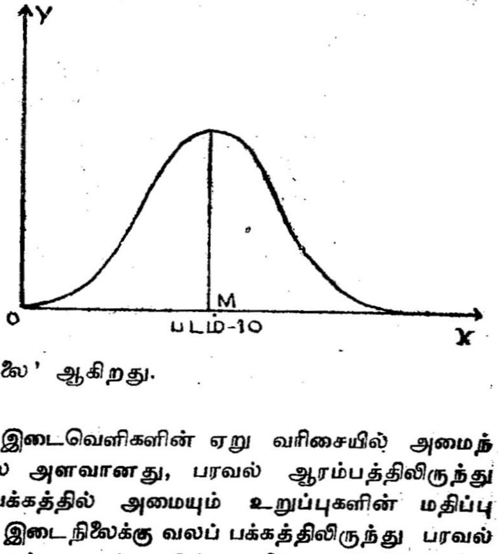
உதாரணமாக, 46, 82, 59, 40, 55, 70, 86, 43, 71, 80, 62 என்ற எண்களின் இடைநிலையைக் காண, அவைகளை ஏறு வரிசையில் கீழ் வருமாறு அமைக்கவும். 40, 43, 46, 55, 59, 62, 70, 71, 80, 82, 86. இங்கு $N=11$ ஆனது ஒற்றைப்படை எண். ஆதலால் மத்திய இடம் $=\frac{11+1}{2}=6$-வது இடமாகிறது. ஏறுவரிசையில் (அல்லது இறங்கு வரிசையில்) 6-வது இடத்தில் வரும் எண் 62. இம் மதிப்பையே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் இடைநிலை அளவாகக் கொள்கிறோம்.

இப் 11 எண்களுடன் மற்றொரு எண் 97-ஐயும் சேர்த்துக்கொண்டால், எண்களின் மொத்தம் 12 ஆகும். ஆதலால், இடைநிலை 6-வது, 7-வது இடங்களினிடையில் அமைகிறது. இவ்விடங்களில்

அமையும் எண்களின் மதிப்புகள் முறையே 62, 70. ஆதலால், இவ் வெண்களின் சராசரியை, அதாவது $\frac{62+70}{12}=\frac{132}{12}=66$-ஐ இடை நிலை அளவாகக் கொள்கிறோம்.

அலைவெண் பரவலின் இடைநிலை (Median of a frequency distribution): ஒரு தொடர்ச்சி மாறியின் அலைவெண் பரவலைக் கவனிப்போம். அலைவெண்களின் கூடுதலை N- எனக் கொள்வோம். திரள் அலைவெண் $\frac{N}{2}$—விற்குரிய இடத்தில் அமையும் மாறியின் மதிப்பளவைப் பரவலின் இடைநிலை அளவாகக் கருதுகிறோம்.

x—மாறியின் அலைவெண் பாதையை வரைக. அலைவுப் பாதைக் கும், x—அச்சிற்கும் இடையில் உள்ள பரப் பளவைச் சரியாக இரண்டு சம பாகமாக் கும் செங்குத்துக் கோட்டை நிர்ணயிக் கவும். அக்கோடு x-அச்சை வெட்டும் இடத்தை M—என்ற புள்ளியாற் குறிக்க வும். OM-ன் நீளத்தை அளந்தால், அதன் மதிப்பளவே 'இடைநிலை' ஆகிறது.



படம்-10

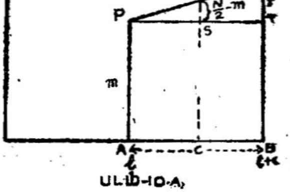
பரவலின் பிரிவு, இடைவெளிகளின் ஏறு வரிசையில் அமைந் திருப்பதால், இடைநிலை அளவானது, பரவல் ஆரம்பத்திலிருந்து இடைநிலைக்கு இடப் பக்கத்தில் அமையும் உறுப்புகளின் மதிப்பு களுக்கு அதிகமாகவும், இடைநிலைக்கு வலப் பக்கத்திலிருந்து பரவல் முடியும் வரை அமையும் உறுப்புகளின் மதிப்புகளுக்குக் குறை வாகவும் உள்ளது என்றும் அறியலாம்.

இடைநிலைப் புள்ளியின் வழியாக வரையும் செங்குத்துக்கோடு, அலைவெண் பரவலை இருசமபாகமாகப் பிரிப்பதால், அக்கோட்டின் இடப் புறத்தில், மொத்த உறுப்புகளின் முதல் 50% உறுப்புகள் அமைகின்றன என்றும், வலப் புறத்தில் ஏனைய 50% உறுப்புகள் அமைகின்றன என்றும் அறிகிறோம்.

கணக்கியல் வாயிலாக அலைவெண் பரவலின் இடைநிலையை நிர்ணயிக்கும் முறை (விதம்): x என்பது ஒரு தொடர்ச்சி மாறி (continuous variable) யைக் குறிக்கட்டும். x-மாறியின் அலைவெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளிகளை, இடைவிடாத தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளாக (continuous class intervals) மாற்றியமைக்கவும். அலைவெண்களின் கூடுதல் (N) மிகப் பெரியதாக இருந்தால், ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியிலும், பிரிவு அலைவெண்கள் ஒரே சீராகப் பரவியிருக்கும் என மேற்கொள்கிறோம். பிறகு பரவலின் இடைநிலை அளவை இண்டர்பொலேஷன் (interpolation) முறையைக்கொண்டு தோராயமாக நிர்ணயிக்கிறோம்.

அலைவுப் பரவலின் அட்டவணை ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளி யிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. திரள் அலைவெண் பரவல், ஒரு குறித்த மதிப்பிற்குக் குறைந்த அல்லது மேம்பட்ட மதிப்புகளையுடைய உறுப்புகளின் திரள் அலைவெண்களைக் காட்டுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் x-மாறியின் அலைவெண் பரவலில் அமையும் பிரிவு இடைவெளிகளை, உண்மையான தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளாக மாற்றிக்கொள்ளவும். ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் உச்சவரம்பிற்குள் அடங்கிய திரள் அலைவெண்களைக் கொண்டு, ஓர் அலைவெண் பரவல் அட்டவணையைத் தயார் செய்து கொள்ளவும். அலைவெண்களின் கூடுதலை N-எனக் கொண்டால், திரள் அலைவெண் (Cumulative frequency) $\frac{N}{2}$ விற்குரிய x-ன் மதிப்பு நிகழக்கூடிய பிரிவு இடைவெளியைத் தீர்மானிக்கவும். இப்பிரிவு இடைவெளியை $(l, l+c)$ எனக்கொள். பரவலின் இடைநிலை, l-ற்கும், $l+c$-யிற்கும் இடையில் அமைகிறது. ஆதலால் இந்த இடைவெளியை, இடைநிலைக்கேற்ற பிரிவு (Median class) என்று கூறுகிறோம். இப்பிரிவு இடைவெளியின் கீழ்வரம்பிற்குள் மதிப்புகளையுடைய உறுப்புகளின் திரள் அலைவெண்ணை m-எனவும், இடைநிலைக்கேற்ற பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்ணை f-எனவும் கொள்க. இடைநிலை l-ஐக் காட்டிலும், x-தூரத்தில் அமைவதாகக் கொள். அதாவது திரள் அலைவெண் $\frac{N}{2}$ விற்குரிய, x-மாறியின் மதிப்பு, கீழ்வரம்பிற்கப்பால் (lower limit), x-தூரத்தில் அமைவதாகக் கொள்கிறோம்.



படம்-10-A

வரைபடம்மூலம், முக்கோணங்கள் PSR-ம், PTQ-ம் வடிவொத்திருக்கின்றன. எனவே, $\frac{PS}{PT} = \frac{SR}{TQ}$

$$ie., \quad \frac{x}{C} = \frac{\frac{N}{2} - m}{f}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C.$$

$\therefore$ இடைநிலை அளவு $= l + x.$

$$= l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C.$$

அலைவெண் பரவலின் இடைநிலையைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரம் :

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C.$$

ஓர் அலைவெண் பரவலின் இடைநிலையைக் கணக்கிடும் பொழுது, படிப்படியாகச் செயல் முறையில் அனுசரிக்க வேண்டிய விதிகள் :

(*a*) பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியாக இல்லாவிடின் அவைகளை, உண்மையான தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளி (True class intervals) களாக மாற்றவும்.

(*b*) அலைவெண் பரவல் அட்டவணையிலேயே, உச்ச வரம்பிற்குள் அடங்கிய மதிப்புகளையுடைய திரள் அலைவெண்களைக் குறிக்கவும்.

(*c*) திரள் அலைவெண் $\frac{N}{2}$ ல் அமையும் பிரிவு இடைவெளியைக் காண். அதை $(l, l + c)$ எனக் கொள். $l =$ இடைநிலைக்கேற்ற பிரிவு இடைவெளியின் கீழ்வரம்பு. (Lower limit of the median class); $c =$ இடைவெளித்தூரம் (Class interval) ; $f =$ இடைநிலை திகழும் பிரிவு அலைவெண் (frequency of the median class).

(d) l-க்குக் குறைவான மதிப்புகளையுடைய உறுப்புகளின் திரள் அலைவெண்ணைக் காண் (Cumulative frequency up to the median class). அதை m-எனக் கொள்.

(e) இடைநிலை $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தி இடைநிலையைக் கணக்கிடவும்.

மாதிரி 1: கீழ்வரும் அலைவுப் பரவலின் இடைநிலையைக் காண் :

பிரிவு இடை வெளி :	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64.
பிரிவு அலை வெண் :	3	5	8	10	7	5	2

இங்கு (29·5—34·5); (34·5—39·5)......என்பன தொடர்ச்சிப் பிரிவு இடைவெளிகளாகின்றன.

உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி	பிரிவு அலை வெண்	திரள் அலை வெண்
29·5 — 34·5	3	3
34·5 — 39·5	5	8
39·5 — 44·5	8	16
44·5 — 49·5	10	26
49·5 — 54·5	7	33
54·5 — 59·5	5	38
59·5 — 64·5	2	40
மொத்தம்	40	...

$N = 40$; $\frac{N}{2} = 20$. அட்டவணையை நாம் கண்ணுற்றால், இடைநிலை நிகழும் பிரிவு இடைவெளி (44·5 — 49·5) என அறியக்கூடும்.

$\therefore l = 44{\cdot}5$; $m = 16$; $f = 10$; $c = 5$.

$\longrightarrow \frac{N}{2}$. இடைநிலை $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$

$$= 44{\cdot}5 + \frac{20-16}{\frac{10}{2}} \times 5$$

$$= 44{\cdot}5 + 2{\cdot}0$$

$$= 46{\cdot}5.$$

$\therefore$ **இடைநிலை = 46·5**

மாதிரி 2: கீழ்க்காணும் I.Q. பரவலின் இடைநிலையைக் காண்:

x:	55-64	65-74	75-84	85-94	95-104	105-114
f:	1	2	9	22	33	22

x:	115-124	125-134	135-144.
f:	8	2	1

உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி	அலை வெண்	திரள் அலை வெண்
54·5 — 64·5	1	1
64·5 — 74·5	2	3
74·5 — 84·5	9	12
84·5 — 94·5	22	34
94·5 — 104·5	33	67
104·5 — 114·5	22	89
114·5 — 124·5	8	97
124·5 — 134·5	2	99
134·5 — 144·5	1	100
மொத்தம்	100	...

$N = 100;\ \frac{N}{2} = 50;\ C = 10.$

இடைநிலைப் பிரிவு இடைவெளி (94·5 — 104·5)

$\therefore l = 94{\cdot}5;\ m = 34.\ f = 33.$

$$\text{இடை நிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} C$$

$$\longrightarrow \quad = 94{\cdot}5 + \frac{50 - 34}{33} \times 10.$$

$$= 94{\cdot}5 + 4{\cdot}84.$$

$$= 99{\cdot}34$$

$\therefore$ **இடைநிலை = 99·34**

முகடு (Mode): ஒரு மாறியின் எந்த அளவானது பல தடவைகள் நிகழ்கிறதோ, அந்த அளவை, மாறியின் முகடு என்று சொல்லுகின்றோம்., நடைமுறையில், பெரும்பாலும் முகடு அளவே நடைமுறையிலிருந்து வருகிறது.

2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 9, 11 ஆகிய எண்களில் எண் 7 ஆனது ஏனைய எண்களைக் காட்டிலும் மிக அதிக தடவைகள் வருகின்றன. எனவே, இவ்வெண்களின் முகடை 7-எனக் கூறுகிறோம்.

சில சமயங்களில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்கள், ஒரே தடவையில் நேர்ந்திருக்கக்கூடும். அச்சமயங்களில், நமக்குத் தனிப்பட்ட ஒரே ஒரு முகடு ஏற்படுவதற்குப் பதில், பல முகடுகள் ஏற்படக்கூடும். இச்சமயங்களில் முகடைத் தீர்மானிப்பது இயலாத காரியம். இருந்த போதிலும், நடைமுறையில், ஒரே ஒரு முகடுள்ள பரவலைத்தான் எடுத்து ஆராய்கிறோம். கீழ்வரும் அலைவெண் பரவலைக் கவனிக்கவும்.

ஒவ்வொரு குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	குறித்த குழந்தைகளையுடைய குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை.
0	75
1	96
2	103
3	180
4	130
5	60
6	35
7	12
8	5
9	3
10	1
மொத்தம்	700

இப்பரவலில், 3 குழந்தைகள் உள்ள குடும்பங்களே அதிகம் நேர்ந்திருக்கின்றன. எனவே பரவலின் முகடு, உண்மையாக ஏற்படக்கூடிய ஓர் எடுத்துக்காட்டான அளவாகவுள்ளது. இவ்வுண்மையைப் பரவலின் கூட்டிடை 2·90வுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது புலனாகிறது. 2·90 குழந்தைகள் உள்ளன என்று கற்பனை செய்வதே இயலாத காரியம் ஆகும். எனவே, கூட்டிடைக் கணக்கியல் நுட்ப அறிவிற்கு இன்றியமையாததே தவிர, இங்குப் பொது அறிவிற்கு முரண்பட்டதாகவே உள்ளது. ஆனால் முகடு, பொது அறிவிற்கு மிகவும் பயன்படுகிறது. கணக்கியல் நுட்ப அறிவிற்குக் கூட்டிடையைப் போல், முகடு அவ்வளவு மதிப்புள்ளதாகக் கூற முடியாது. ஆகவே ஒவ்வொரு வகைச் சராசரியும், ஒவ்வொரு விதத்தில் சிறந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

பரவலின் முகடை உறுதியாக அளவிட்டுக் கூறமுடியாது. அதைத் தோராயமாகத்தான் அளவிட முடியும். ஆதலால் பரவலை, அதற்குகந்த ஓர் அலைவெண் பாதையால் பொருத்தியமைத்து, x-அச்சில் எந்தப் புள்ளியின் வழியாக வளைவுப்பாதைக்கு மிகப் பெரிய செங்குத்துக்கோடு வரையப்படுகிறதோ, அப் புள்ளிக்குகந்த மதிப்பையே, பரவலின் முகடாகக் கருதுகிறோம்.

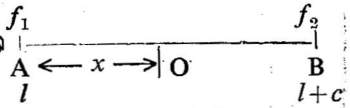
கணக்கியலில் $f(x)$ என்னும் கோவை x-மாறியின் அலைவெண் பரவல்பாதையைக் குறித்தால் x-ன் எந்த மதிப்பு, $\frac{d}{dx}\left\{f(x)\right\} = 0$;

$\frac{d^2}{dx^2}\left\{ f(x) \right\} < 0$. ஆகியவைகளை நிறைவேற்றுகிறதோ, அதை x-ன் ஒரு முகடாகக் கருதுகிறோம்.

அலைவெண் பரவலின் முகடைக் கணக்கிடும் விதம்: x-மாறியின் அலைவெண் பரவலிலுள்ள பிரிவு இடைவெளிகளைத் தொடர்ச்சியான இடைவெளிகளாக மாற்றிய அட்டவணையைத் தயாரிக்கவும். அதிலிருந்து உச்ச அலைவெண்ணிற்குரிய உண்மையான பிரிவு இடைவெளியைக் கண்டு அதை $(l, l+c)$ எனக் குறிக்கவும். முகடு, இப்பிரிவு இடைவெளியிலமைந்தால், இதை முகடுப் பிரிவு இடைவெளி (Modal Class) என்று கூறுகிறோம். l-ஐ முகடின் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் வரம்பாகவும், இடைவெளித் தூரம் c ஆனால், $l+c$-ஐ முகடின் பிரிவு இடைவெளியின் உச்ச வரம்பாகவும் கொள்கிறோம். முகடின் அளவு l-க்கும், $l+c$-க்கும் இடையில் அமைகிறது. முகடுப்பிரிவு இடைவெளியிலேயே, உச்ச அலைவெண் ஏற்படுவதால், இடைவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் மதிப்பையும் பரவலின் முகடாகக் கருதலாம். ஆனால் பரவலை, ஒரு 'முகடுப் பரவலாக'க் (Uni Modal) கொள்வதால், முகடைக் குறிக்கும் ஒரே ஒரு புள்ளியைச் சாதாரணத் தராசின் விதியைப் (Principle of Common balance) பயன்படுத்தி நிர்ணயிக்கிறோம்.

உச்ச அலைவெண்ணிற்கு மேலும் கீழும் வரும் அலைவெண்களை, f_1, f_2 எனக் கொள்ளவும். அவைகளின் முகடுப் பிரிவின் கீழ், மேல் வரம்புகளில் எடைகளாக அமைகின்றன என்று கற்பனை செய்து கொள்ளவும். இவ்விரு எடைகளையும் சமநிலைப்படுத்தும் ஆதாரப் புள்ளியே முகடை நிர்ணயிக்கும் புள்ளியாகும். இப்புள்ளி, l லிருந்து x-தூரத்தில் அமைவதாகக் கொண்டால், தராசின் விதிப்படி,

$f_1 x = f_2 (c - x)$ என்ற சமன்பாடு



கிடைக்கிறது.

அதாவது, $f_1 x = f_2(c - x)$. i.e. $f_1 x = f_2 c - f_2 x$.

$$i.e.\quad (f_1 + f_2)\, x = f_2 \,.\, c.$$

$$i.e.\quad x = \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times c.$$

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times c.$$

சூத்திரம்:

$$\boxed{\text{முகடு} = l + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times c.}$$

மாதிரி: பின்வரும் அலைவெண் பரவலின் முகடைக் காண்.

பிரிவு இடைவெளி	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64.
பிரிவு அலைவெண்	3	5	8	10	7	5	2.

உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி	பிரிவு அலை வெண்
29·5 — 34·5	3
34·5 — 39·5	5
39·5 — 44·5	8
44·5 — 49·5	10
49·5 — 54·5	7
54·5 — 59·5	5
59·5 — 64·5	2
மொத்தம்	40

உச்ச அலை வெண்: 10.

முகடுப்பிரிவு இடைவெளி: (44·5—49·5).

$\therefore\ l = 44{\cdot}5;\ c = 5;\ f_1 = 8;\ f_2 = 7.$

சூத்திரம்:

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times c.$$

$$= 44{\cdot}5 + \frac{7}{\overset{3}{\cancel{15}}} \times 5 = 44{\cdot}5 + 2{\cdot}33.$$

$$= 46{\cdot}83.$$

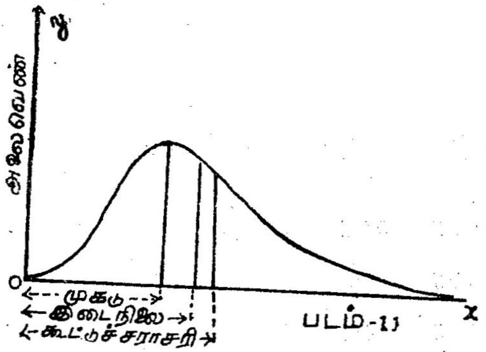
$\therefore$ **முகடு = 46·83**

அனுபவத்தையே அடிப்படையாகக் கொண்டு கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு - இவைகளுக்குள்ள தொடர்பு: சமச்சீராக உள்ள ஒரு பரவலில், கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு - ஆகிய மைய நிலைப் போக்கு அளவுகள் (Measures of central tendency) சம அளவைப் பெறுகின்றன. சமச்சீரற்ற பரவலில், இவைகள் அளவில் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபடுகின்றன. ஒரு சாதாரண சமச்சீர் முற்றிலும் இல்லாத பரவலில், இம்மூன்று சராசரிகட்கும் உள்ள தொடர்பை, அனுபவ முறையில், ஊகித்தறிந்து ஒரு சூத்திரம் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அச் சூத்திரத்தைக் கீழ் வரும் சமன்பாடு அறிவிக்கிறது (படம் 11-ஐப் பார்க்க).

[கூட்டிடை - முகடு] = 3 [கூட்டிடை - இடைநிலை].

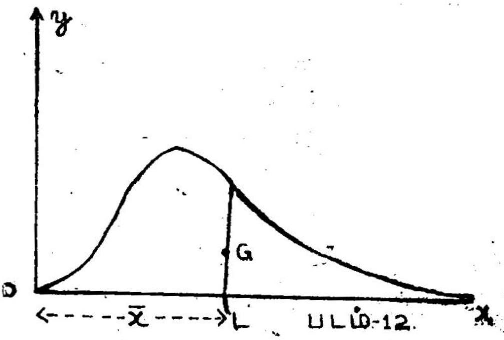
i.e. [Mean - Mode] = 3 [Mean—Median].

ஜியோமிதி (வரைபடம்) மூலம் கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு — இவைகளை விளக்குதல் :



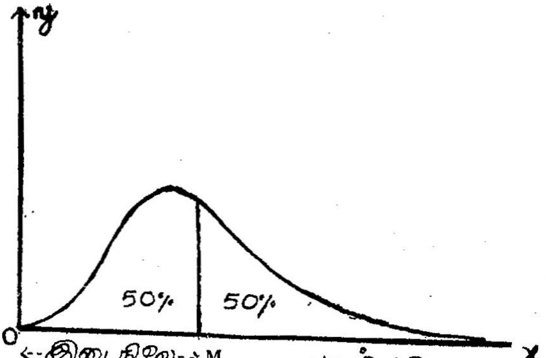
படம்-11

x-மாறியின் அலைவெண் பாதையை வரைக. அப்பாதை முற்றிலும் ஒரே சமச்சீராக அமைந்திருந்தால், இம் மூன்று சராசரிகளும் ஒரே மதிப்புடையனவாக இருக்கும். பரவலின் பாதை சமச்சீரற்றதாக இருந்தால், இம்மூன்றும், அளவுகளில் மாறுபட்டிருக்கும். படம் 11-ல் காட்டியபடி அலைவெண் பாதைக்கும், x-அச்சிற்கும் இடையேயுள்ள பரப்பிற்குச் சமமானதும், அந்த உருவத்தையுடையதுமான ஓர் அட்டையைத் தயாரித்துக் கொள்ளவும். அந்த அட்டையை ஓர் ஊசி முனையின் மேல் நிறுத்தி; அதன் புவிஈர்ப்புத் தானத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும். அதை G-எனக் குறிக்கவும். G-யின் வழியாக x-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு (⊥-line) வரையவும். அது x-அச்சை L-ல் வெட்டட்டும். OL-ஆனது, G-யின் கிடை அச்சுத் தூரம் (x-co-ordinate) ஆகும். இக் கிடைத்தூரமே, பரவலின் கூட்டிடையாகும். எனவே, ஓர் அலைவெண் பரவலின் கூட்டிடை, அதன் பரப்பிற்குரிய, புவிஈர்ப்புத் தானத்தின் கிடைத் தூரமாகும் (படம் 12).



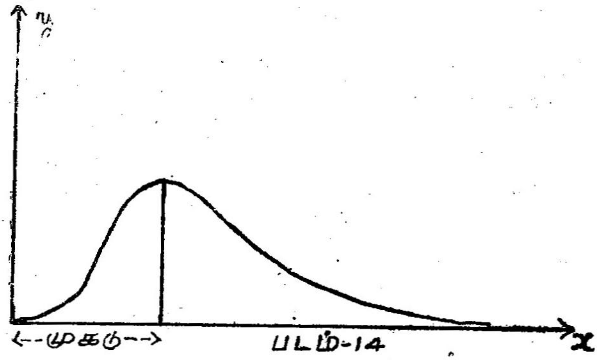
படம்-12

அலைவெண் பாதைக்கும் x-அச்சிற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பை, இடை நிலையைக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு இரண்டு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. இதனை வரைபடம் மூலம் அறிவதற்கு, பகிர்வின் இருமுனைகளிலிருந்தும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள கட்டங்களைச் சேர்த்துக் கொண்டு வந்தால், பரவலின் பரப்பளவானது, ஒரு செங்குத்துக்கோட்டால், இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கப்படும் (படம் 13). அச் செங்குத்துக்கோடு, x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியை M எனக்கொண்டு, OM நீளத்தை அளந்தால், அந்த நீளமே பரவலின் இடைநிலை ஆகும்.



படம்-13

ஆகவே ஓர் அலைவெண் பரவலின் இடைநிலை, அதன் பரப்பளவை, இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் செங்குத்துக் கோட்டின் கிடை அச்சுத் தூரமாகும்.



படம்-14

அலைவெண் பாதையின் உச்சிப்புள்ளியைக் குறித்து, அதன் வழியாக x-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரையவும். அது x-அச்சை, N-ல் வெட்டட்டும். ON-ஐ அளக்கவும். அதுவே பரவலின் முகடு ஆகும். எனவே, ஓர் அலைவெண் பரவலின் முகடானது அவ்வலைவுப் பாதையின் உச்சிப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் கிடை அச்சுத் தூரமாகும் (படம் 14).

கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை ஆகியவைகளை ஒப்பிடுதல்:
(*a*) இவ்விரண்டு அளவுகளும் தெளிவாகவும், நன்றாகவும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகள், எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகளையும் கையாண்டு இருக்கின்றன. இவையிரண்டும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியனவாகவும் உள்ளன.

(*b*) இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடும் முறை, கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடும் முறையைக் காட்டிலும் சுலபமானது.

(*c*) மாதிரியின் (Sample) ஏற்றத் தாழ்வுகளால், இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரியைக் காட்டிலும் அதிக அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது.

(*d*) எண்கணிப்பு (Arithmetical) முறைக்குக் கூட்டுச் சராசரியே, இடைநிலையைக் காட்டிலும் மேம்பட்டது. பல தொகுதிகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் ஒரு முழுத் தொகுதியின் கூட்டிடையை, அத்தொகுதிகளின் கூட்டிடைகளின் மூலம் வெளிப்படுத்தமுடியும். ஆயின் முழுத்தொகுதியின் இடைநிலையை, தொகுதிகளின் இடைநிலையைக்கொண்டு மதிப்பிடமுடியாது. ஏனெனில் முழுத் தொகுதியின் இடைநிலை, தொகுதிகளை ஒன்று சேர்த்து, அதன் உறுப்பு மதிப்புகளுக்குத் தக்கவாறு ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்து உண்டாகும் நடு உறுப்பின் மதிப்பளவானது நிர்ணயிக்கிறது. எனவே, கணக்கீடு முறைகளில், கூட்டிடைக்குத்தான் உயர்ந்த இடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(*e*) இடைநிலையானது ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பின் மதிப்பளவாகும். உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பின், மாணவர்களின் உயர இடைநிலையைக்காண, எல்லா மாணவர்களையும் அவர்களின் உயரத்திற்குத் தக்கவாறு ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையிலமைத்து, அவர்களின் நடுவிலமையும் மாணவனின் உயரத்தை மட்டும் அளந்தால் போதுமானது. ஆயின், வகுப்பின் கூட்டிடையைக்காண, எல்லா மாணவர்களின் உயரத்தையும் அளவிடல் வேண்டும். தவிரவும் எண் மதிப்பால் அளவிட முடியாது உறுப்புகளின் பண்புகளை, இடைநிலையால் தான் அளவிட முடியும். இச்சமயங்களில் கூட்டிடையைக் கையாள்வது பரிகசிக்கத்தக்கது.

(*f*) ஒரு மாதிரிக் கூறிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், அவைகளின் கூட்டிடையைக் கொண்டு, மாதிரியின் மொத்த மதிப்பைக் கணக்கிட முடியும். ஆனால், மாதிரியிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை இடைநிலையைக் கொண்டு, மாதிரியின் மொத்த மதிப்பைக் கணக்கிடல் அரிது.

(*g*) ஓர் அலேவுப் பரவலில், ஆரம்பத்திலோ, இறுதியிலோ ஐயத்திற்குரிய பிரிவு இடைவெளிகள் அமைந்திருந்த போதிலும், அப்பரவலின் இடைநிலேயைக் கணக்கிடமுடியும். ஆயின் கூட்டிடையைக் கணக்கிட முடியாது. ஏனெனில், பரவலின் கிடைக்கோடிகளில் அமையும் பிரிவுக் குறிப்பெண்களேத் தீர்மானிக்க முடியாது.

(*h*) இடைநிலேயானது இறுதியில் சேர்க்கப்படும் மதிப்புகளால், கூட்டிடையைப்போன்று அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுவதில்லே. எனவே, இச் சந்தர்ப்பங்களில் இடைநிலேயே சிறந்த சராசரி அளவாகக் கருதப்படுகிறது.

இடைநிலே, முகடு இவைகளே ஒப்பிடுதல்

இடைநிலேயும் முகடும் மிகச் சிறிய, மிகப் பெரிய உறுப்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லே. ஆனல், இவைகளிரண்டும் கூட்டுச் சராசரியைப் போல உறுதியாகக் காணக்கூடியவையல்ல. இரு பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகளேத் தனித்தனியே கண்டு, இவைகளின் வாயிலாகவே, இவ்விரு பரவல்களே ஒன்ருகச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம். ஆனல், இரு தனித்த பரவல்களுக்குரிய இடைநிலே, முகடுகளிலிருந்து ஒன்ருகச் சேர்த்தமைத்த பரவலின் இடைநிலே, முகடுகளேக் காண முடியாது.

பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean)

சில மாறிகள் பெருக்குத் தொடர்ச்சி அல்லது அடுக்குத் தேற்ற விதிகளே அனுசரித்துப் பெருகுகின்றன. உதாரணமாக, நிலேயான பிறப்பு, இறப்பு வீதங்களே உடைய ஒரு நகரத்தின் ஜனத்தொகை, மொத்த ஜனத்தொகைக்கேற்ற விகிதாசாரத்தில் அபிவிருத்தியடைகிறது. ஒரு மாறியின் மொத்த வளர்ச்சிக்குப் பதில் அதன் விகித வளர்ச்சிக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்க வேண்டிய சமயங்களில், பெருக்கிடையைச் சிறந்ததாகப் பயன்படுத்துகிருேம்.

n உறுப்பு மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி அவ்வுறுப்பு மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையை n வது வர்க்க மூலத்தால் வரையறுக்கிருேம். அதாவது x_1, x_2,......, x_n என்பன x ன் n மதிப்புகளானல், x ன் பெருக்குச் சராசரியை அவ் வெண்களின் பெருக்குத் தொகையின் n வது வர்க்க மூலம் நிர்ணயிக்கிறது.

சூத்திரம்: x ன் n மதிப்பெண்களின் பெருக்கிடையை G-குறித்தால், $G=\sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n}$. ஆகும்.

அலைவெண் பரவலின் பெருக்குச் சராசரி: (x_r, f_r), $r=1, 2, \ldots\ldots n$, ஓர் அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கட்டும். அதன் பெருக்குச் சராசரியை G-குறிக்கட்டும். $\therefore G = \left[x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \ldots\ldots x_n^{f_n}\right]^{\frac{1}{N}}$,

$N=f_1+f_2+\ldots\ldots+f_n$ என்று சூத்திரத்தால் வரையறுக்கிறோம்.

ஒரு நகரத்தின் ஜனத்தொகை 1930, 1940ஆம் ஆண்டுகளில் முறையே 1,60,000; 2,50,000. 1935ஆம் ஆண்டில் ஜனத்தொகை சாதாரணக் கூட்டிடையின் மூலம்,

$$\frac{1,60,000+2,50,000}{2} = \frac{4,10,000}{2} = 2,05,000$$

ஆக மதிப்பிடப்படுகிறது. பெருக்குச் சராசரி மூலம் 1935ஆம் ஆண்டு ஜனத்தொகை

$$\sqrt{1,60,000 \times 2,50,000} = 4\times 5\times 10,000 = 2,00,000$$

என மதிப்பிடப்படுகிறது. இதிலிருந்து பெருக்குச் சராசரி மதிப்பானது கூட்டிடையைக் காட்டிலும் குறைவானது என்பது புலனாகிறது.

ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள மக்கள் அதிகரிக்கும் பொழுது, நகரத்து ஜனத்தொகையின் வளர்ச்சியைக் கூட்டிடை அறிவிக்கிறது. ஆனால், ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஜனத்தொகையின் பெருக்கம், ஜனத்தொகையின் மொத்தத்தின் விகிதாசாரத்தில் அமைந்திருந்தால், நகரத்து ஜனத்தொகையின் வளர்ச்சியைப் பெருக்குச் சராசரி அறிவிக்கிறது.

x-மாறி 100, 110, 121, 134 என்ற மதிப்புகளை 4 குறிப்பிட்ட காலங்களில் ஏற்கிறது என வைத்துக்கொள்வோம். 2ஆவது காலத்திய x ன் மதிப்பிற்கும், 1ஆவது காலத்திய x ன் மதிப்பிற்குமுள்ள மொத்த வேறுபாட்டுப் பெருக்கம்: 110—100=10. விகிதாசாரப் பெருக்கம்

$$= \frac{10}{100}\times 100=10\%.$$

மூன்ருவது காலத்திய x ன் மதிப்பிற்கும், 2ஆவது காலத்திய x ன் மதிப்பிற்கும் உள்ள மொத்தப் பெருக்கம். $\Big\} = 121 - 110 = 11.$

$\therefore$ மூன்ருவது காலத்தில் 2ஆவது காலத்தைவிட மொத்த அபிவிருத்தி $= 121 - 110 = 11.$

ஆனல் விகிதர்சாரப் பெருக்கம்...... $= 110 \times \frac{10}{100} = 10\%$.

இதேபோல 4ஆவது காலத்திய xன் மதிப்பிற்கும், மூன்ருவது காலத்திய xன் மதிப்பிற்கும் உள்ள மொத்தப் பெருக்கம். $\Big\} = 134 - 121 = 13.$

ஆனல் விகிதாசாரப் பெருக்கம் $= \frac{13}{121} \times 100 = \frac{1300}{121} = 10{\cdot}7\%$.

ஒவ்வொரு காலத்திலும் உண்டாகும் பெருக்கங்கள் முறையே, 10 ; 11 ; 13 ஆகின்றன. ஆயின், அவைகளின் விகிதப் பெருக்கம் முறையே, 10% ; 10% ; 10·7% ஆகின்றன. $\therefore$ 4ஆவது காலத்தில், முதற் காலத்தில் x ஏற்கும் மதிப்பின் அளவைவிட மொத்த அதிகரிப்பு $= 34$ ஆகும். அதனுல், விகிதப் பெருக்கும் 10%க்குச் சற்று அதிகமாகவே உள்ளது. அதாவது விகிதப் பெருக்கம் ஓரே சீராக உள்ளது.

மாதிரி 1 : கீழ்க் காணும் எண்களின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண் : 9, 4, 32, 12, 18.

பெருக்குச் சராசரி :

$$\sqrt[5]{9 \times 4 \times 32 \times 12 \times 18}$$

$$= \sqrt[3]{3^2 . 2^2 . 2^5 . 2^2 . 3 . 2 . 3^2} = \sqrt[5]{2^{10} . 3^5}$$

$$= 4 \times 3 = 12.$$

2. ஒரு குழந்தையின் எடை ஜனவரி மாதம் 1ஆம் தேதி 15 பவுண்டு, மார்ச்சு மாதம் 1ஆம் தேதி 21 பவுண்டாக இருந்தால், பெருக்குச் சரர்சரியை உபயோகித்து, அக் குழந்தையின் எடை பிப்ரவரி 1ஆம் தேதி எவ்வளவு ?

குழந்தையின் எடை (பிப்ரவரி 1ஆம் தேதி)

$$= \sqrt{15 \times 21} = \sqrt{5 \times 3 \times 7 \times 3}$$

$$= 3 \times \sqrt{35} = 3 \times 5{\cdot}91 = 17{\cdot}73 \text{ பவுண்டு.}$$

பெருக்குச் சராசரியின் இயல்புகள்: (*a*) பெருக்குச் சராசரியானது, தெளிவாகவும், நன்கு வரையறுக்கப்பட்டதாகவும், எல்லா வுறுப்புகளின் மதிப்புகளையும் அனுசரித்து வரையறுக்கப்பட்டதாகவும் உள்ளது. (*b*) சூத்திரத்தை உபயோகித்துச் சுலப முறையில் கணக்கிட முடிகிறது. (*c*) இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட தொகுதிகளை ஒன்று சேர்த்து உண்டாகும் முழுத் தொகுதியின் பெருக்குச் சராசரி, தொகுதிகளின் பெருக்குச் சராசரி மூலம் கணக்கிடலாம்.

உதாரணமாகிய K மாதிரிகளிலடங்கிய (samples) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1, n_2, \ldots n_k$ எனவும், அவைகளின் பெருக்குச் சராசரி முறையே $G_1, G_2, \ldots\ldots G_k$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மாதிரிகளை ஒன்று சேர்த்து உண்டாகும் முழுத் தொகுதியின் பெருக்குச் சராசரி G ஐ,

$$G = \left[G_1^{n_1} . \; G_2^{n_2} \ldots\ldots G_k^{n_k}\right]^{\frac{1}{N}}, \; N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

என்னும் சூத்திரம் அறிவிக்கிறது.

$$\therefore G^N = G_1^{n_1} \cdot \; G_2^{n_2} \cdot \ldots\ldots G_k^{n_k} .$$

$$\therefore N \log G = \log\left[G_1^{n_1} \cdot \; G_2^{n_2} \ldots\ldots G_k^{n_k}\right]$$

$$= n_1 \log G_1 + n_2 \log G_2 + \ldots\ldots + n_k \log G_k.$$

$$\therefore \log G = \frac{n_1 \log G_1 + n_2 \log G_2 + \ldots\ldots + n_k \log G_k}{N}$$

$$\therefore \boxed{\log G = \frac{\sum_{r=1}^{n} n_r . \log G_r}{N}, \; N = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k.}$$

(*d*) *n* விகிதங்களின் பெருக்குச் சராசரியை, அவ் விகிதங்களின் தொகுதிகளில் வரும் உறுப்பு மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரிக்கும்

பகுதிகளில் வரும் உறுப்பு மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரிக்கும் உள்ள விகிதம் அறிவிக்கிறது. $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots\ldots, \frac{x_n}{y_n}$ என்பன x விகிதங்களைக் குறிக்கட்டும். G, G_1, G_2 என்பன முறையே விகிதங்கள், தொகுதி எண்கள், பகுதி எண்கள் ஆகியவைகளின் பெருக்குச் சராசரியைத் தெரிவித்தால்,

$$G = \left[\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x_n}{y_n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{(y_1 \cdot y_2 \ldots\ldots\ldots y_n)^{\frac{1}{n}}} \qquad \therefore \boxed{G = \frac{G_1}{G_2}}$$

(*e*) குறியீட்டெண்களைக் (Index numbers) காணக் கணக்கிடுவதில், பெருக்கிடை அதிக முக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளது.

ஹார்மானிக் மீன் (Harmonic Mean)

கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் தலைகீழ்ப் பின்னங்களை அமைத்து, அவைகளின் கூட்டிடையின் விலோமத்தை (தலைகீழ்ப் பின்னத்தை) அவ் வெண்களின் 'ஹார்மானிக் மீன்' என்று குறிப்பிடுகிறோம். $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன x ன் n மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். அவைகளின் தலைகீழ்ப் பின்னங்களின் மதிப்புகள் $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots\ldots \frac{1}{x_n}$ ஆகும்.

$$\therefore \text{இவ் விலோமங்களின் கூட்டிடை} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x_r}.$$

$$\therefore \text{ஹார்மானிக் மீன்} = \frac{1}{\text{விலோமத்தின் கூட்டிடை}}.$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x_r}}.$$

$$\therefore \text{ஹார்மானிக் மீன்} = \boxed{\frac{n}{\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x_r}}}$$

அலைவெண் பரவலின் ஹார்மானிக் மீன் :— (x_r, f_r), $r=1, 2, \ldots\ldots n$ ஓர் அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கட்டும். $x_1, x_2, \ldots x_n$ களின் விலோமங்கள், $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_n}$ ஆகும். அவைகள் முறையே $f_1, f_2, \ldots f_n$ முறைகள், பரவலில் வருகின்றன.

∴ விலோமங்களுக்குகந்த விகிதங்களின் கூட்டிடை

$$= \left[\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_n}{x_n}\right] \div N, N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n.$$

$$\therefore \text{ஹார்மானிக் மீன்} = \frac{1}{\frac{1}{N} \cdot \left[\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots \frac{f_n}{x_n}\right]}$$

$$= \frac{N}{\left[\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_n}{x_n}\right]}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{அலைவுப் பரவலின்}\\ \text{ஹார்மானிக் மீன்}\end{array}\right\} = \frac{N}{\sum_{r=1}^{n} \frac{f_r}{x_r}}}$$

பயிற்சி

1. மையநிலைப் போக்கு அளவைகள் (Measures of Central tendency) என்றால் என்ன? அவைகளுக்குரிய பண்புகள் யாவை?

2. கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு ஆகிய சராசரி அளவு கோல்களை விவரி.

3. மையநிலைப் போக்கு அளவைகளான கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு இவைகளுக்குள்ள ஒற்றுமை, வேற்றுமைகளை ஆராய்க. ஒவ்வொன்றையும் எவ்விடங்களில் பயன்படுத்தலாம் என்பதற்கு, எடுத்துக்காட்டுகள் கூறி, விளக்கம் தருக. இம்மூன்று சராசரிகளும் எப்போது ஒன்றுபடும்?

4. ஜியோமிதி மூலம், கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு இவைகள் எவ்விதம் வரையறுக்கப்படுகின்றன? நடைமுறையில், இவைகளுக்குள்ள உறவைத் தெரிவிக்கும் சூத்திரத்தை எழுதுக.

5. (*a*) பின்வரும் எண்களின் கூட்டிடையைக் காண்:

(i) 39, 67, 52, 71, 48, 40, 61, 75, 69, 78. (விடை 60)

(ii) 18, 23, 16, 103, 42, 61, 49, 113, 10, 95. (விடை 53)

(*b*) 5 (a) பிரிவில் வரும் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள எண்களிலிருந்து, அவைகளின் கூட்டிடையைக் கழித்து, வரும் கூடுதல் 0ஆக வருவதைக் காண்க. இது எத் தேற்றத்தை விளக்குகிறது?

6. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 40 மாணவர்களின் சராசரி எடை 75 பவுண்டும், மற்றொரு வகுப்பிலுள்ள 60 மாணவர்களின் சராசரி எடை 75 பவுண்டுமானால் அவ்விரு வகுப்பு மாணவர்களின் சராசரி எடையைக் காண்.

7. 12 மனிதர்களின் உயரம் (அங்.) பின்வருமாறு:

73, 72, 72, 71, 71, 71, 70, 70, 69, 69, 69, 69. இவர்களின் சராசரி உயரத்தை, (*a*) தனித்தனி எண்களாகக் கொண்டு, (*b*) 70 ஐத் தோராய மையமாகக் கொண்டு, (*c*) அலைவெண் பரவல் அட்டவணை அமைத்துக் கணக்கிடுக. (விடை 70·5 அங்.)

8. பின்வரும் எண்களின் இடைநிலையைக் காண் :

49, 57, 62, 40, 71, 69, 64, 53, 76, 47, 79. (விடை 62)

இவ்வெண்களுடன் 81ஐச் சேர்த்தால், இடைநிலையின் மதிப்பென்ன ?

(விடை 63)

9. பின்வரும் எண்களின் முகடைக் காண்.

47, 39, 63, 47, 62, 39, 47, 54, 58, 47, 65, 69, 47. (விடை 47)

10. 5 வயதிலிருந்து 10 வயதுவரை உள்ள சிறுவர்களின் எடைகளைப் பின்வரும் அட்டவணை தெரிவிக்கிறது.

எடை (பவுண்டு)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	மொத்தம்
எண்ணிக்கை	9	22	28	21	17	3	100

சிறுவர்களின் எடைகளின் கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு இவற்றைக் காண்.

11. 100 இலைகளுடைய நீளங்களின், அலைவெண் பரவல் அட்டவணை பின்வருமாறு :

இலைகளின் நீளம் (மி.மீ.)	20-24	25-29	30-34	35-39	
எண்ணிக்கை :	1	5	10	19	
இலைகளின் நீளம் (மி.மீ.)	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64
எண்ணிக்கை :	25	21	15	3	1

இலைகளுடைய நீளங்களின் கூட்டிடை, இடைநிலை, முகடு இவற்றைக் காண்.

[விடை. கூட்டிடை : 42·4 மி.மீ.
இடைநிலை : 42·5 ,,
முகடு : 42·125 ,,]

12. 100 என்.ஸி.ஸி. மாணவர்களின் உயரங்களைப் பின்வரும் அட்டவணை அறிவிக்கிறது.

உயரம் நடுமதிப்பு :	62	64	66	68	70	72
அலேவெண் :	3	12	32	24	21	8

இப் பரவலின் குவிவு அலேவெண் அட்டவணையை அமைத்துக் கீழ் இன ஒகைவை வரைக. இதனைப் பயன்படுத்தி, இடைநிலே உயரத்தைக் காண். (விடை 67·2")

இப் பரவலின் கூட்டிடை, முகடு இவைகளேக் காண்.

(விடை கூட்டிடை = 67·4". முகடு = 66·4".)

13. பின்வரும் அலேவெண் பரவலின் கூட்டிடை, இடைநிலே, முகடு இவைகளேக் காண்க :

பிரிவு இடைவெளி :	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99.
அலேவெண் :	2	3	11	20	32	25	7

[விடை : கூட்டிடை = 72·5
இடைநிலே = 73·9
முகடு = 75·1]

14. பின்வரும் எண்களின் பெருக்கிடையைக் காண் :

(*a*) 36, 12, 24, 48. (விடை 12)

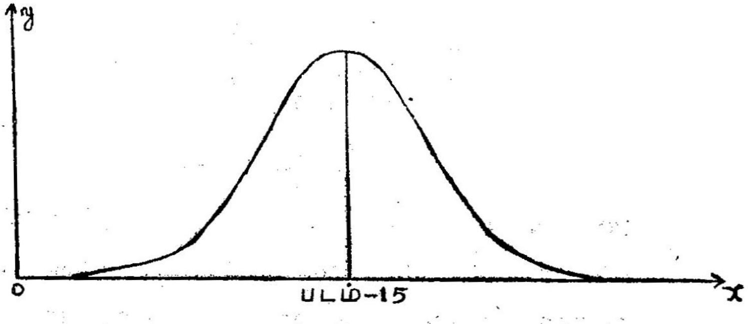
(*b*) 2, 4, 8, 16, 32. (விடை 8)

(*c*) 7·96; 13·82; 22·95; 35·34. (விடை 17·28)

6. சிதறல்

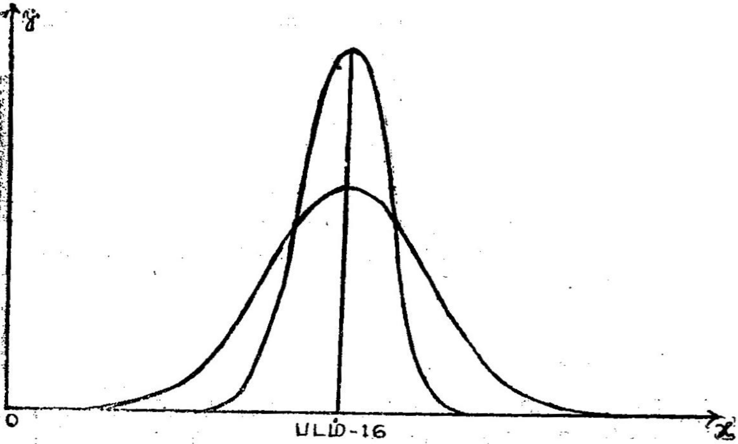
(Dispersion)

சமச்சீராக உள்ள அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடை நிலை, முகடு ஆகியவைகள் ஒன்றுபடுகின்றன. (படம் 15).



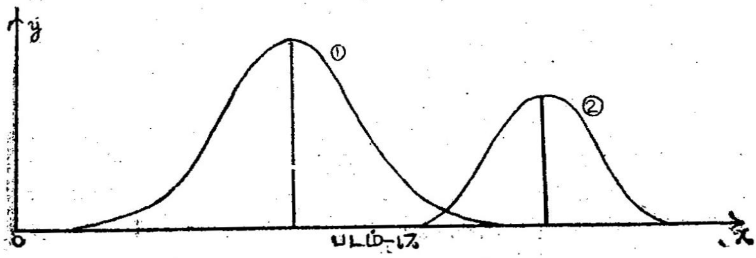
படம்-15

ஆதலால், இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஒரே மாதிரியானதும், ஒரே சமச்சீராக உள்ளதுமான பரவல்களின் மைய நிலைப் போக்கு அளவுகள் சமமாகும்பொழுது, பரவல்களை மைய நிலைப் போக்கு அளவுகளைக்கொண்டு ஒத்திட இயலாது. ஏனெனில், பரவல்களின் சராசரிகள் ஒரே மதிப்புள்ளனவாக இருந்தபோதிலும், அலைவுப் பரவல்கள் சராசரிகளைச் சுற்றிலும் பரவலில் அல்லது சிதறி அமைவதில் வேறுபட்டிருக்கக்கூடும் (படம் 16).



படம்-16

இரண்டு அலேவுப் பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலே, முகடுகள் சமமாகவும், பரவல்களின் அலேவெண் வளேகோடுகள் மையநிலேப் போக்கு அலேவுகளுக்கு ஒரே சீராக இருந்தபோதிலும், அவைகள் பரவலில் அல்லது சிதறலில் மாறுபட்டிருக்கலாம். அல்லது, அலேவுப் பரவல்கள் வெவ்வேறு சராசரிகளேப் பெற்று, அவைகளேச் சுற்றி ஒரே சமச்சீரான அலேவெண் வளேகோடுகளேப் பெற்றிருந்த போதிலும், அப்பரவல்கள் சிதறலில் வேறுபட்டிருக்கலாம் (படம் 17).



படம்-17

ஆதலால், சராசரி அளவுகோல்கள் பரவலின் மையநிலேப் போக்கைத் தெரிவிக்கின்றனவே தவிர, பரவலுடைய சிதறலின் தன்மையை அறிய உதவுவதில்லே. ஓர் அலேவுப் பரவலில், உறுப்புகள் மையநிலேப் போக்கு அளவுகளேச் சுற்றிலும் எவ்வாறு சிதறி, அவை

களிலிருந்து மாறுபட்ட அளவுகளைப் பெற்றிருக்கின்றன என்று அறிய, சில சிதறல் அளவுகோல்களை வரையறுத்துச் சிதறலின் தன்மைகளைப் புரிந்து கொள்கிறோம்.

சிதறல் அளவுகோல்கள்

சிதறல் அளவைகளில் முக்கியமான அளவுகோல்கள் : (1) வீச்சு (Range); (2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation); (3) சராசரி விலக்கம் (Average Deviation); (4) திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation) ஆகும்.

(1) வீச்சு (Range)

சிதறலை அளக்க மிக எளிதாகப் பயன்படும் அளவுகோல் இதுவாகும். ஒரு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளின் பெருமத்திற்கும், சிறுமத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை, மாறியின் வீச்சு எனக் கூறுகிறோம். வீச்சு நிறையானது, எளிதாகக் கணக்கிடக்கூடியது, தெளிவாக விளக்கக்கூடியது. எனவே, இந் நிறை பல தொழில் துறைகளில் கையாளப்பட்டு வருகிறது. இருந்தபோதிலும், வீச்சளவை உபயோகிப்பதில் பல இடையூறுகள் உள்ளன. மாதிரிக் கூறுகளின் மாற்றத்திற்கு ஏற்றவாறு, வீச்சின் அளவு, ஏற்றத் தாழ்வுகளால் அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுகிறது. மேலும், ஒரு மாறியின் உண்மையானதும், நிலையானதுமான பெருமத்தையும் சிறுமத்தையும் எப்பொழுதுமே நிர்ணயிக்க முடியாது. உதாரணமாக, ஒரு குழுவில் மிகப் பெரிய மனிதனின் உயரம் 6′ 10″ ஆகவும், மிகச் சிறிய மனிதனின் உயரம் 4′ ஆகவும் இருந்தால், வீச்சின் அளவு 2′ 10″ ஆகிறது. ஆனால், நடைமுறையில் இத்தகைய இரு உயரங்களுடைய மனிதர்களை ஒரே சமயத்தில் காணுதலரிது. ஆதலால், வீச்சளவு மாறுபட நேரமுள்ளது. மேலும் வீச்சு, இரண்டு கடைக்கோடி உறுப்புகளின் மதிப்புகளைப் பொறுத்திருக்கிறதே தவிர, மற்ற மதிப்புகளைப் பற்றி அறிவிப்பதில்லை. ஆதலால், இந் நிறை எப்பொழுதும் நிலையாக இருக்குமெனக் கூற முடியாது. எனவே, வீச்சளவு சில சமயங்களில் பயன்பட்டாலும், அதை ஓர் உயர்வான அளவுகோல் என்று ஏற்றுக்கொள்ள முடியாது.

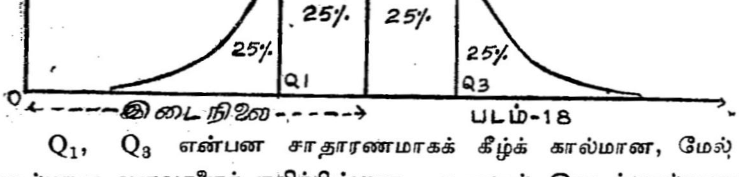
(2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

இரண்டு கோடியிலமையும் உறுப்புகளின் மதிப்புகளை ஏற்றுக்கொள்வதற்குப் பதிலாக, இடைநிலை அளவுடன் இன்னும் இரண்டு மதிப்புகளை இடைநிலையின் இரு பக்கங்களிலிருந்து சம தூரத்தில்

அமைத்து, பரவல் முழுவதையும் நான்கு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கு மாறு எடுத்துக்கொள்ளவும். இவ்விரு அளவுகளையும் கால்மானங்கள் எனக் கூறுகிறோம். இடைநிலைக்கு இடது புறத்திலமையும் அளவை 'கீழ்க் கால்மானம்' (Q_1) எனவும், வலது புறத்திலமையும் அளவை 'மேல் கால்மானம்' (Q_3) எனவும் குறிக்கிறோம்.

கீழ்க் கால்மான நிறையானது, பரவலை 1 : 3 என்ற விகிதத்திலும், மேல் கால்மான நிறை 3 : 1 என்ற விகிதத்திலும் பிரிக்கும். அதாவது, உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையில் 25% உறுப்புகள் கீழ்க் கால்மான அளவுக்குக் குறைவான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் படியும், 25% உறுப்புகள் மேல் கால்மான அளவுக்கு மேலான அளவுகளைப் பெற்றிருக்கும்படியும் கால்மானங்கள் எடுக்கப்படுகின்றன என்றும் நாம் அறிகிறோம். ஆகவே, இவ்விரு கால்மானங்களுக்கும் இடையே 50% உறுப்புகள் அமைக்கின்றோம். இவ்விரு நிறைகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை இடைக் கால்மான வீச்சு (Inter-Quartile Range) எனக் கூறுகிறோம். இதன் சரிபாதி அளவை அரை இடைக் கால்மான வீச்சு (Semi-Inter-Quartile Range) அல்லது கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation) என்று வரையறுக் கிறோம். பரவலின் சிதறல் அளவாகவும் ஏற்றுக்கொள்கிறோம்.

இவ்விரு கால்மான நிறைகளுக்கு அப்பால், பரவலின் ஆரம்பத் திலிருந்தும், முடிவிலிருந்தும் 25% உறுப்புகளை அகற்றுவதனால் கால்மான விலக்கச் சிதறல் அளவுகோல் கடைக்கோடி உறுப்பு மதிப்புகளினால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.



படம்-18

Q_1, Q_3 என்பன சாதாரணமாகக் கீழ்க் கால்மான, மேல் கால்மான அளவுகளைக் குறிக்கின்றன. ஆதலால், இடைக் கால்மான

வீச்சு $= (Q_3 - Q_1)$, அரை இடைக்கால்மான வீச்சு $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$.

i.e. கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

கால்மான விலக்கத்தை எளிதில் கணக்கிடமுடியும். இச்சிதறல் அளவுகோல், கருத்து நிரம்பியதாகவும், எளிதில் புரிந்துகொள்ளக்கூடியதாகவும், பரவலில் 50% உறுப்புகளுக்கு இடமளித்து மதிப்பிடப்பட்டதாகவுமுள்ளது. பொருளாதார, வர்த்தகப் புள்ளி விவரக் கணக்கியல்களில் இது மிகவும் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. அலைவுப் பரவலின் ஆரம்பத்திலோ, இறுதியிலோ நிர்ணயிக்க முடியாத பிரிவு இடைவெளிகள் அமைந்திருந்தபோதிலும்கூட, பரவலின் சிதறலைக் கால்மான விலக்க மூலம் விளக்கக்கூடும். இம்மாதிரியான பரவல்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சந்தர்ப்பங்களில், இடைநிலை, கால்மான விலக்கம் ஆகியவை முறையே பரவலின் மையநிலைப் போக்கு, சிதறல் அளவுகோலாகப் பயன்படுகின்றன.

அலைவுப் பரவலின் கால்மானங்களைக் கணக்கிடும் சூத்திரங்கள்

ஒரு தொடர்ச்சிமாறி x-ன் அலைவெண் வளைகோட்டுக்கும், x அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பை, இடைநிலைப் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக்கோடு இருசம பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. அதேபோல, கீழ்க் கால்மானத்தைக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியே வரையும் நிலைக்கோடு, இடைநிலைக்கு இடதுபுறத்திலுள்ள பரப்பை இருசம பாகங்களாகவும், மேல் கால்மானத்தைக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக்கோடு, இடைநிலைக்கு வலது புறத்திலுள்ள பரப்பை இரு சம பாகங்களாகவும் பிரிப்பதால், பரவலின் கால்மானங்களை இடைநிலையின் சூத்திரமாக அமைக்கிறோம். ஆதலால்,

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times C$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{\frac{3}{4}N - m_3}{f_3} \times C$$ என்ற சூத்திரங்கள்

மூலம் கால்மான அளவுகளை மதிப்பிடலாம்.

'கீழ் இன ஒகைவ்'—வரைபடமூலம் கால்மானங்களை மதிப்பிடுதல்

வரைபடத்தாளில் கிடை அச்சில் (x-axis) மேல் வரம்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளையும், நிலை அச்சில் (y-axis) திரள் அலைவெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை அமைத்து, 'கீழ் இன ஒகைவ்' வரையப்பட்டுள்ளது. நிலை அச்சுக்கோட்டில் திறள் அலைவெண்கள் $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகளின் வழியே கிடை அச்சுக்கு இணைக் கோடுகள் வரையவும். அவைகள் கீழ் இன ஒகைவை வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். அப்புள்ளிகளின் கிடை அச்சுத்தூரங்கள் முறையே Q_1 (கீழ்க் கால்மானம்)மையும், Q_3 (மேல் கால்மானம்)மையும் வரைபடமூலம் விளக்குகின்றன. இப்புள்ளிககளின் மாதிரி ---- குறிக்கப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

பத்துமானம் (Decile)

ஓர் அலைவுப் பரவலைப் பத்து பிரிவுகளாகப் பிரிக்கும்பொழுது, இடைநிலை, கால்மானப் பிரிவுகள் தனிப்பட்ட நிலைகளாகின்றன (particular cases). பரவலிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் மதிப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு ஏறு வரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்து, பின் பத்துச் சம பாகங்களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பாகத்திலும் ஒரே எண்ணிக்கைகளுள்ள உறுப்புகள் இருக்குமாறு அமைக்கவும். பத்து பாகங்களாகப் பிரிக்கும் இடங்களிலமையும் உறுப்புகளின் மதிப்புகளை 1ஆவது, 2ஆவது, 3ஆவது,......... பத்துமானம் எனக் கூறுகிறோம். இப் பத்துமானக் கருத்தைக் கல்வித் தொடர்பான மனோதத்துவ நூல்களில் உபயோகித்து, மாணவர்களின் மதிநுட்பத்திற்கு ஏற்றவாறு பத்து தரங்களாகப் பிரிக்கிறார்கள்.

கீழ் இன ஒகைவ் வரைபடத்தின் நிலை அச்சுக்கோட்டில் $\frac{N}{10}$, $\frac{2N}{10}$, ... $\frac{9N}{10}$, N—திரள் அலைவெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளின் வழியே கிடை அச்சுக்கு இணைகோடுகள் வரைந்து, அவைகள் 'கீழ் இன' ஒகைவைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். அப் புள்ளிகளின் கிடை (அச்சுத்) தூரங்கள் (x-co-ordinates) முறையே 1ஆவது, 2ஆவது......10ஆவது பத்துமான அளவுகளை மதிப்பிடுகின்றன.

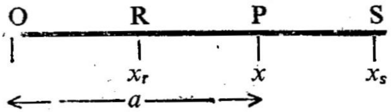
நூற்றுமானம் (Percentiles)

ஓர் அலைவெண் பரவலை 100 பாகங்களாகவும், ஒவ்வொரு பாகத்திலும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் அடங்கினதாகவும் பிரிப்பதற்கு 'நூற்றுமானம்' என்று பெயர். பரவலின் பிரிவு

அலைவெண்களை மொத்த அலைவெண்களின் சதவீதங்களாக மாற்றி யமைத்து 'கால்டனின் ஓகைவ்' (Galton's Ogive) வளைகோட்டை அமைக்கலாம்.

(3) சராசரி விலக்கம் (Average Deviation):

ஏதாவதொரு தோராய மதிப்பிற்கும் (arbitrary value), ஒரு மாறியின் மதிப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாடுகளின் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சராசரி விலக்கம் என்று பெயர். தோராய மதிப்பிற்கும், மாறியின் மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு சில சமயங்களில் பூஜ்யத்திற்கு மேலும் (+ *ve* ஆகவும்), சில சமயங்களில் பூஜ்யத்திற்குக் குறைவாக வும் (— *ve* ஆகவும்) வர இயலுகிறது. அதாவது, கிடைகோட்டில்,



P என்ற புள்ளி தோராய மதிப்பு 'a' ஐக் குறிக்கட்டும். R, S என்ற புள்ளிகள் x—மாறியின் ஏதாவது இரு மதிப்புகளைக் (x_r, x_s களை) குறிக்கட்டும். ஆதலால்,

$x_r - a < 0$ ஆகவும்,

$x_s - a > 0$ ஆகவும் அமைகின்றன.

இவ்விரு வகையான வேறுபாடுகளுக்குச் சம வாய்ப்பு அளிப்பதற்காக, வேறுபாடுகளை வெறும் விலக்கங்களாகக் (absolute deviations) கருது கிறோம். x_r, a இவைகளுக்குள்ள விலக்கத்தை வெறும் விலக்கமாகக் கருத $|x_r - a|$ —என்ற குறியால் (symbol) விளக்குகிறோம்.

தோராய மதிப்பு, மாறியின் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சமமானால், சராசரி விலக்கத்தைக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் எனக் கூறுகிறோம்.

உதாரணமாக, x மாறியின் n மதிப்புகளை $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ எனக் கொள்வோம். x ன் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ x_1க்கும் $\bar{x}$க்கும் உள்ள விலக்கம் $= x_1 - \bar{x}$.

$\therefore$ x_1க்கும் $\bar{x}$க்கும் உள்ள வெறும் விலக்கம் $= |x_1 - \bar{x}|$.

ஆதலால் உறுப்புகளின் மொத்த விலக்கம் $= |x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + \ldots\ldots + |x_n-\bar{x}|$.

$\therefore$ கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + \ldots\ldots + |x_n-\bar{x}|}{n}$$

(*i.e.,*) சூத்திரம்:

$$\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} |x_r-\bar{x}|$$

x-மாறியின் இடைநிலையை M எனக் குறித்தால், இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கம் $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} |x_r-M|$ என்று ஆகிறது.

அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

(x_r, f_r), $r = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$ என்பது ஓர் அலைவுப் பரவலைக் குறிக்கட்டும். அப் பகிர்வின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}$ எனக் கொள்வோம்.

x_1க்கும், $\bar{x}$க்கும் உள்ள வெறும் விலக்கம் $= |x_1-\bar{x}|$.

x_1க்கும், $\bar{x}$க்கும் உள்ள எடையுடன் பொருந்திய வெறும் விலக்கம் $= f_1 |x_1-\bar{x}|$.

$\therefore$ எடையுடன் பொருந்திய மொத்த வெறும் விலக்கம் :

$$= f_1|x_1-\bar{x}| + f_2|x_2-\bar{x}| + \ldots\ldots + f_n|x_n-\bar{x}|.$$

$\therefore$ பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் :

$$= \frac{f_1|x_1-\bar{x}| + f_2|x_2-\bar{x}| + \ldots\ldots + f_n|x_n-\bar{x}|}{f_1+f_2+\ldots\ldots+f_n}.$$

சூத்திரம் :

$$\text{பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \mid x_r - \bar{x} \mid$$

$$N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n.$$

மாதிரி 1 :

கீழ்வரும் எண்களின் கூட்டிடையையும், கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தையும் காண்க.

11, 12, 10, 8, 14.

$$\bar{x} = \frac{11+12+10+8+14}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

மொத்த வெறும் விலக்கம் $= \mid 11-11 \mid + \mid 12-11 \mid + \mid 10-11 \mid + \mid 8-11 \mid + \mid 14-11 \mid$

$= 0+1+1+3+3$

$= 8.$

$$\therefore \text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{\text{மொத்த வெறும் விலக்கம்}}{\text{மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{8}{5} = 1{\cdot}6.$$

மாதிரி 2 :

கீழ்வரும் அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடவும்.

பிரிவு இடைவெளி :	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64
அலைவெண் :	3	5	8	10	7	5	2

அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 46 \cdot 5$.

பிரிவுக் குறிப் பெண்	பிரிவு அலை வெண்	$\lvert x_r - \bar{x} \rvert$	$f_r \lvert x_r - \bar{x} \rvert$
32	3	14·5	43·5
37	5	9·5	47·5
42	8	4·5	36·0
47	10	0·5	5·0
52	7	5·5	38·5
57	5	10·5	52·5
62	2	15·5	31·0
மொத்தம்	40	...	254·0

$$\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \lvert x_r - \bar{x} \rvert .$$

$$= \frac{1}{40} \times 254 \cdot 0.$$

$$= 6.35.$$

திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடும்பொழுது விலக்கங்களை வெறும் விலக்கங்களாகப் பிரித்தோம். அதற்குப் பதிலாக விலக்கங்கள் '$+ve$' ஆகவோ, '$-ve$' ஆகவோ இருந்தாலும், அவ் விலக்கங்களின் இருபடி வர்க்கங்களின் மூலம் 'சிதறல்' அளவைப் பெறலாம்.

உறுப்புகளின் மதிப்பிற்கும், ஏதாவதொரு தோராய மதிப்பிற்கு முள்ள வேறுபாடுகளின் இருபடி வர்க்கங்களைக் கணக்கிட்டு, அவை களின் சராசரியின் வர்க்கமூலத்தை 'வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம்' (Root mean square deviation) எனக் கூறுகிறோம். மேலும்,

உறுப்புகளின் மதிப்பிற்கும், அவைகளின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடுகளின் இருபடி வர்க்கத்தைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் சராசரியின் வர்க்க மூலத்தையே, உறுப்புகளின் திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation) எனக் கூறுகிறோம். வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம் பல புள்ளிகளிலிருந்து கணக்கிடலாம். அவை அனைத்திலும் திட்ட விலக்கமே குறைந்த மதிப்புடையது. திட்ட விலக்கத்தின் வர்க்கம் 'மாற்றம்' (Variance) எனப்படும்.

x—மாறியின் n மதிப்புகளை x_1, x_2,......x_n எனக் குறிக்கவும். $\bar{x}$, x ன் கூட்டுச் சராசரியைக் குறிக்கட்டும். $(x_1-\bar{x})$, $(x_2-\bar{x})$, ... $(x_n-\bar{x})$ என்பன முறையே x-ன் மதிப்புகளுக்கும், x-ன் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடுகளைத் தெரிவிக்கின்றன. $(x_1-\bar{x})^2$, $(x_2-\bar{x})^2$, ... $(x_n-\bar{x})^2$ என்பன இவ் வித்தியாசங்களின் இருபடி மதிப்பினைக் குறிக்கின்றன. ஆதலால், இவ் வித்தியாசங்களின் கூடுதல் $= (x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n-\bar{x})^2$. இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி$= \frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n-\bar{x})^2\right]$. இக் கூட்டிடையின் வர்க்க மூலமே x-மாறியின் திட்ட விலக்கமாகும்.

∴ திட்ட விலக்கம்=

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n-\bar{x})^2\right]}.$$

திட்ட விலக்கத்தை σ— என்ற சின்னத்தால் குறிப்பது வழக்கம்.

∴ சூத்திரம் :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_r-\bar{x})^2}$$

திட்ட விலக்கத்தின் [இருபடி] வர்க்கத்தை, மாறியின் மாற்றம் (Variance) எனக் கூறுகிறோம்.

$$\therefore\ x \text{ ன் மாற்றம் } = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_r-\bar{x})^2.$$

அலைவுப் பரவலின் திட்ட விலக்கம்

(x_r, f_r), $r=1, 2......n$ என்பது ஓர் அலைவெண் பரவலைக் குறிக் கட்டும். பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}$ எனவும், திட்ட விலக் கத்தை σ எனவும் கொள்ளவும்.

கீழ்வரும் அட்டவணை x-மாறியின், எடையைப் பொருத்தி திட்ட விலக்கத்தைக் காணும் முறையை எளிதாக்குகிறது.

பிரிவுக் குறிப்பெண் x_r.	பிரிவு அலைவெண் f_r.	$(x_r-\bar{x})$	$(x_r-\bar{x})^2$	$f_r\,(x_r-\bar{x})^2$.
x_1	f_1	$(x_1-\bar{x})$	$(x_1-\bar{x})^2$	$f_1\,(x_1-\bar{x})^2$
x_2	f_2	$(x_2-\bar{x})$	$(x_2-\bar{x})^2$	$f_2(x_2-\bar{x})^2$.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_r	f_r	$(x_r-\bar{x})$	$(x_r-\bar{x})^2$	$f_r\,(x_r-\bar{x})^2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_n	f_n	$(x_n-\bar{x})$	$(x_n-\bar{x})^2$	$f_n\,(x_n-\bar{x})^2$
மொத்தம்	N	...	...	$\Sigma f_r (x_r-\bar{x})^2$

சூத்திரம் :

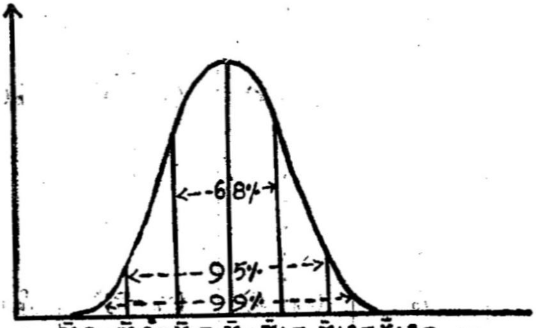
$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\left\{f_1\,(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+......+f_n(x_n-\bar{x})^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\,\Sigma f_r\,(x_r-\bar{x})^2}.$$

திட்ட விலக்கத்தின் பண்புகள்

எல்லாச் சிதறல் அளவுகளிலும் திட்ட விலக்கம்தான் மிகச் சிறந்தது. திட்ட விலக்கம், மாதிரியிலுள்ள உறுப்பு மதிப்புகள் எல்லாவற்றையும் அனுசரித்து நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது. இது மாதிரிகளின் ஏற்றத் தாழ்வுகளினால் அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுவதில்லை. மேலும், மாதிரிகளின் பிழை விளக்க முறைகளிலும் (sampling errors), உடன் தொடர்புக் கெழுவை நிர்ணயிப்பதிலும், மாறிகளைத் தரப்படுத்துவதிலும் (standardization) பயன்படுகிறது. ஒழுங்கு வளைவுப் பாதையின் சமன்பாட்டில் (equation to the normal curve) திட்ட விலக்கம் ஒரு துணை அலகாக (parameter) பயன்பட்டு வருகிறது.

ஓர் ஒழுங்கு அலைவெண் பரவலில் $(\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma)$ என்ற பிரிவு இடைவெளியில் அமையும் பரப்பு சுமார் 68% ஆகவும்,



படம்-19

$(\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் பரப்பு சுமார் 95% ஆகவும், $(\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma)$ல் சுமார் 99% ஆகவும் உள்ளது.

எளிய முறையில் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடும் சூத்திரங்கள்

$x_1, x_2 ......x_n$ என்பன xன் மதிப்புகளையும், $\bar{x}$, σ என்பன முறையே கூட்டிடை, திட்ட விலக்கத்தையும் குறிக்கட்டும்.

(i) முதல் வகை எளிய சூத்திரம் :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_r - \bar{x})^2}$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{n} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n - \bar{x})^2 \right\}.$$

$$= \frac{1}{n} \Big[(x_1^2 - 2x_1 \bar{x} + \bar{x}^2) + (x_2^2 - 2x_2 \bar{x} + \bar{x}^2) + \ldots\ldots$$

$$+ (x_n^2 - 2x_n \bar{x} + \bar{x}^2) \Big].$$

$$= \frac{1}{n} \Big[(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2) - 2\bar{x} (x_1 + x_2 + \ldots\ldots$$

$$+ x_n) + n.\bar{x}^2 \Big].$$

$$= \frac{1}{n} \Big[(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2) - 2\bar{x}.\, n\bar{x} + n\bar{x}^2 \Big].$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} x_r^2 - \bar{x}^2.$$

(ii) இரண்டாம் வகை எளிய சூத்திரம் :

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன xன் மதிப்புகளையும், $\bar{x}$, σ முறையே x ன் கூட்டிடை, திட்ட விலக்கத்தையும் குறிக்கட்டும். a என்பது ஏதோ ஒரு தோராய மதிப்பு. சூத்திரத்தின் மூலம்,

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_r - \bar{x})^2.$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \Big[x_r - a + a - \bar{x} \Big]^2.$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \Big[(x_r - a) - (\bar{x} - a) \Big]^2.$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \Big[(x_r - a) - d \Big]^2, \quad d = (\bar{x} - a).$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \left[(x_r-a)^2 - 2\, d.\ (x_r-a) + d^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - 2d.\ \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a) + \frac{1}{n} n.\ d^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - 2d.\ \frac{1}{n} \left[\Sigma x_r - na. \right] + d^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - 2d \left[\frac{1}{n} \Sigma x_r - a \right] + d^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - 2d\ (\bar{x} - a) + d^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - 2\, d^2 + d^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - d^2$$

∴ 2ஆம் வகை எளிய சூத்திரம்:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_r - a)^2 - (\bar{x} - a)^2}$$

மாதிரி 1 :

கீழ்வரும் எண்களின் இடைநிலை, கால்மான அளவுகள், கால் விலக்கம் இவைகளைக் காண்.

50·4, 50·2, 50·7, 49·8, 50·1, 50·3, 49·8, 50·0, 49·9, 50·3, 49·6 எண்களை ஏறு வரிசையில் அமைக்கவும்.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
49·6,	49·8,	49·8,	49·9,	50·0,	50·1,	50·2,	50·3,	50·3,	50·4,	50·7.

$n = 11$. ஆதலால் இடைநிலை $= \frac{11+1}{2} = 6$ஆம் உறுப்பின் மதிப்பு $= 50{\cdot}1$.

∴ இடைநிலை $= 50{\cdot}1$

$Q_1 = \frac{n+1}{4}$ ஆம் உறுப்பின் மதிப்பு $= 3$ஆம் உறுப்பின் மதிப்பு $= 49{\cdot}8$.

∴ $Q_1 = 49{\cdot}8$

$Q_3 = \frac{3}{4}(n+1)$ஆம் உறுப்பின் மதிப்பு$=9$ஆம் உறுப்பின் மதிப்பு
$= 50{\cdot}3.$

$$\therefore \quad \boxed{Q_3 = 50{\cdot}3}$$

$\therefore$ கால் விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{50{\cdot}3 - 49{\cdot}8}{2} = \frac{0{\cdot}5}{2}$

கால் விலக்கம் $= 0{\cdot}25$

மாதிரி 2:

கீழ்வரும் எண்களின் கூட்டிடை, சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

50·4, 50·2, 50·7, 49·8, 50·1, 50·3, 49·8, 50·0, 49·9, 50·3, 49.6.

x_r	$x_r - 50$ $-$	$+$	$(x_r - 50)^2$	$\lvert x_r - \bar{x} \rvert$ $\lvert x_r - 50{\cdot}1 \rvert$
50·4		0·4	·16	0·3
50·2		0·2	·04	0·1
50·7		0·7	·49	0·6
49·8	0·2		·04	0·3
50·1		0·1	·01	0·0
50·3		0·3	·09	0·2
49·8	0·2		·04	0·3
50·0		0·0	·00	0·1
49·9	0·1		·01	0·2
50·3		0·3	·09	0·2
49·6	0·4		·16	0·5
மொத்தம்	1·1		1·13	2·8

$$\bar{x}=a+\frac{1}{n}\Sigma(x_r-a)=50+\frac{1\cdot1}{11}=50+0\cdot1$$

$$\therefore \bar{x}=50\cdot1.$$

கூட்டிடைச் சராசரி விலக்கம் $=\frac{1}{n}\Sigma\,|\,x_r-\bar{x}\,|=\frac{1}{11}\times 2\cdot8=0\cdot2545$

$=0\cdot25$

திட்ட விலக்கத்தின் வர்க்கம் (Variance) $=\sigma^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_r-a)^2-(\bar{x}-a)^2.$

$=\frac{1}{11}\times1\cdot13-(0\cdot1)^2=0\cdot1027-0\cdot01.$

$=0\cdot0927.$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $=\sigma=\sqrt{0\cdot0927}=0\cdot302.$

$$\therefore \boxed{\sigma=0\cdot302}$$

மாதிரி 3 :

கீழ்வரும் அலைவெண் பரவலின் கால்மானங்கள், கால் விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளைக் காண்.

பிரிவு இடைவெளி	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	மொத்தம்
அலைவெண் :	3	5	8	10	7	5	2	40

உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	திரள் அலை வெண்
29·5—34·5	3	3
34·5—39·5	5	8
39·5—44·5	8	16
		⟶ $\frac{N}{4}$
44·5—49·5	10	26
		⟶ $\frac{3N}{4}$
49·5—54·5	7	33
54·5—59·5	5	38
59·5—64·5	2	40
மொத்தம்	40	

$$N=40;\ \frac{N}{4}=10;\ \frac{3N}{4}=30.$$

$$Q_1=l_1+\frac{\frac{N}{4}-m_1}{f_1}\times C$$

$$=39\cdot5+\frac{10-8}{8}\times5=39\cdot5+\frac{2}{8}\times5=39\cdot5+1\cdot25$$

$$=40\cdot75$$

$$Q_3=l_3+\frac{\frac{3N}{4}-m_3}{f_3}\times C.$$

$$=49\cdot5+\frac{30-26}{7}\times5=49\cdot5+\frac{4}{7}\times5=49\cdot5+2\cdot85$$

$$=52\cdot35$$

∴ கால் விலக்கம் $=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{52\cdot35-40\cdot75}{2}$

$=5\cdot8$

x_r	f_r	$\mu_r=\frac{x_r-47}{5}$	$f_r\mu_r$ −	$f_r\mu_r$ +	$f_r\mu_r^2$
32	3	—3	9		27
37	5	—2	10		20
42	8	—1	8		8
47	10	0		0	0
52	7	1		7	7
57	5	2		10	20
62	2	3		6	18
மொத்தம்	40	...		—4	100

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{N}\Sigma f_r \mu_r^2 - \left(\frac{1}{N}\Sigma f_r \mu_r\right)^2\right] \times C^2.$$

$$= \left[\frac{100}{40} - \left(\frac{-4}{40}\right)^2\right] \times C^2.$$

$$= (2{\cdot}5 - 0{\cdot}01) \times C^2$$

$$= 2{\cdot}49 \times 25.$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{2{\cdot}49 \times 25}$$

$$= 1{\cdot}5 \times 5$$

$$= 7{\cdot}5.$$

$$\therefore \sigma = 7{\cdot}5.$$

மாதிரி 4 :

11 தொழிலாளர்களின் மாதாந்திரக் கூலிகள் 46, 82, 59, 40, 55, 70, 86, 43, 70, 80, 62 ஆனால், அவைகளின் திட்ட விலக்கத்தையும், கால் விலக்கத்தையும் கணக்கிட்டு ஒப்பிடவும்.

11 எண்களையும் ஏறு வரிசையில் அமைக்கவும்.

40, 43, 46, 55, 59, 62, 70, 70, 80, 82, 86.

N=11.

$\therefore Q_1 =$ வரிசையில் $\frac{N+1}{4} = \frac{12}{4} = 3$ஆவது இடத்தில் வரும்

உறுப்பின் மதிப்பு = 46.

$Q_3 =$ வரிசையில் $\frac{3}{4}(N+1) = 9$ஆவது இடத்தில் அமையும்

உறுப்பின் மதிப்பு = 80.

$\therefore$ கால் விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{80-46}{2} = \frac{34}{2}$$

$$= 17.$$

திட்ட விலக்கம் காணக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$x - \bar{x}$ *i.e.* $(x - 63)$		$(x - \bar{x})^2$
	−	+	
40	23		529
43	20		400
46	17		289
55	8		64
59	4		16
62			1
70		7	49
70		7	49
80		17	289
82		19	361
86		23	529
மொத்தம் 693	...		2,576

$$\bar{x} = \frac{693}{11} = 63.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_r - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{11} \times 2576 = 234{\cdot}18.$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{234{\cdot}18}$$

$$= 15{\cdot}3.$$

∴ கால் விலக்கம் = 17 ; திட்ட விலக்கம் = 15·3.

∴ திட்ட விலக்கம், கால் விலக்கத்தைவிடக் குறைவு.

திட்ட விலக்கம் எல்லா உறுப்பு மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டிருக்கின்றன. கால் விலக்கத்தில், வரிசையில் கொடுத்திருக்கும் 11 எண்களில், முதலில் வரும் இரண்டு எண்களும், இறுதியில் வரும் இரண்டு எண்களும் தள்ளுபடி செய்யப்படுகின்றன. திட்ட விலக்கமே சிறந்த சிதறல் அளவுகோலாக இந்தக் கணக்கில் ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

சிதறல் கெழுக்கள்

ஒரு மாறியின் உறுப்புகளின் மதிப்புகள் எந்த அளவுகோலால் அளவிடப்பட்டிருக்கின்றனவோ, அதே அளவுகோல் அலகினால் 'சிதறல்' அளவுகளும் குறிக்கப்படுகின்றன. உதாரணமாக, உயரத்தை அங்குலத்தில் குறிக்கும் மாறியின் திட்ட விலக்கத்தை அங்குல அளவினாலும், சம்பள வருமானத்தைக் குறிக்கும் ராசியின் கால் விலக்கத்தை ரூபாய் மூலமாகவும், எடையைக் குறிக்கும் ராசியின் திட்ட விலக்கத்தைப் பவுண்டு அளவினாலும் தெரிவிக்கிறோம்.

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பரவல்களின் சிதறல்களை ஒப்பிடும்பொழுது பின்வரும் மூன்று நிலைகள் ஏற்படலாம்:

1. ஒப்பிடப்படும் இரண்டு மாதிரிக் கூறுகளிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகள் சமமாகவும், அவைகளின் மதிப்புகள் ஒரே அளவுகோலால் அளவிடப்பட்டும், சம அளவுள்ள கூட்டிடைகளைப் பெற்றும் இருக்கலாம்.

2. ஒப்பிடப்படும் இரண்டு மாதிரிக் கூறுகளிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகள் வேறுபட்டும், அவைகளின் மதிப்புகள் வெவ்வேறு கூட்டிடைகளையோ, வெவ்வேறு திட்ட விலக்கங்களையோ பெற்றிருக்கலாம்.

3. ஒப்பிடப்படும் இரண்டு மாதிரிக் கூறுகளிலுள்ள உறுப்புகளின் மதிப்புகள், வெவ்வேறு அளவுகோலைக் கொண்டு அளவிடப்பட்டிருக்கலாம்.

இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புகள் வெவ்வேறு அலகுகளைக் கொண்டு அளவிடப்பட்டிருந்தால், அம்மாறிகளின் சிதறல் அளவுகள் அந்தந்த அலகுகளைக் கொண்டு அளவிடப்பட்டிருக்கும். ஆதலால், மாறிகளின் சிதறல் மாறுபாடுகளை, சிதறல் அளவுகோல்களால் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியாது. உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களின் உயரத்தை அங்குல அளவினாலும், எடையைப் பவுண்டு அளவினாலும் அளவிட்டால், அம் மாணவர்களின் உயரத்திற்

குகந்த பரவலின் சிதறல் அளவுகள் அங்குலத்திலும், எடைப் பரவலின் சிதறல் அளவுகள் பவுண்டினுலும் குறிக்கப்படும். இவ்விரண்டு பரவல்களையும், வெவ்வேறு அலகுகளினுல் அளவிடப்பட்ட சிதறல் அளவுகளைக் கொண்டு ஒப்பிடமுடியாது. ஆதலால், இரண்டு பரவல்களின் மாறுபாடுகளை (variation) ஒப்பிட, சிதறல் அளவுகளை அம் மாறிகளுக்குகந்த அலகுகளிலிருந்து பாதிக்கப்படாமலிருக்கும்படிச் செய்யவேண்டும். அதற்காக, நாம் சில சிதறல் கெழுக்களை நிர்ணயித்து, பரவல்களை ஒப்பிடுகிருேம்.

ஒரு சிதறல் அளவுக்கும், அதற்குகந்த மையநிலைப்போக்கு அளவிற்கும் உள்ள விகிதத்தையே சிதறல் கெழு எனக்கொள்கிருேம்.

சில சிதறல் கெழுக்கள் (Relative Measures of variation):

(1) $\frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டிடை}} = \text{Coefficient of variation} = \frac{\text{S.D.}}{\text{A.M.}}$

(2) $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டிடை}} = \frac{\text{M.D. about Mean}}{\text{A.M.}}$

(3) $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}} = \frac{\text{M.D. about Median}}{\text{Median}}$

(4) $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{முகடு}} = \frac{\text{M.D. about Mode}}{\text{Mode}}$

(5) $\frac{\text{கால் விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$ அல்லது

$$\frac{\text{இடைக் கால்மான வீச்சு}}{\text{கால்மான அளவுகளின் கூடுதல்}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

ஒரு மாறியின் திட்ட விலக்கத்திற்கும், கூட்டிடைக்கும் உள்ள விகிதத்தைச் சதவீதத்தில் தெரிவிக்கும் கெழுவை 'மாறுபாட்டுக் கெழு' எனக் கூறுகிருேம். இதுவே எல்லாச் சிதறல் கெழுக்களிலும் சிறந்ததாகும்.

∴ சூத்திரம் : மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient cf variation)

$$= \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டிடை}} \times 100.$$

இக் கெழுவின் தொகுதியில் திட்ட விலக்கம் உள்ளது. ஆதலால் பரவலின் திட்ட விலக்கம் குறைவுபட்டால், கெழுவின் அளவு குறைந்திருக்கும். திட்ட விலக்கம் அதிகரித்தால், கெழுவின் அளவும் அதிகரிக்கும். தவிரவும், 'மாறுபாட்டுக் கெழு' அளவில் குறையக் குறைய, பரவலில் அடங்கிய உறுப்புகள் கூட்டிடையைச் சுற்றிலும் மிகவும் நெருக்கமாகப் பரவியுள்ளது என அறியலாம்.

இரண்டு அலைவெண் பரவல்களை ஒப்பிட்டுக் காணும்பொழுது எந்தப் பரவலின் மாறுபாட்டுக் கெழு மற்றதைவிடக் குறைந்த அளவைப் பெற்றுள்ளதோ, அப் பரவல் மற்றதைக் காட்டிலும் மிகவும் நெருக்கமான பரவலைப் பெற்றிருக்கிறதெனவும், மிகவும் சீராக அமைந்துள்ளதெனவும் கருதுகிறோம்.

இரு மாதிரிகளை ஒன்று சேர்த்துக் கிடைக்கும் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுதல்

n_1, n_2 உறுப்புகள் அடங்கிய இரு மாதிரிக் கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கங்கள் முறையே $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, σ_1, σ_2 எனக் கொள்ளவும்.

இவ்விரு மாதிரிக் கூறுகளை ஒன்றாகச் சேர்த்து உண்டாகும் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கங்களை $\bar{x}$, σ எனக் கொள்ளவும்.

முதல் மாதிரியின் உறுப்புகளின் மதிப்புகள் $= n_1 \cdot \bar{x}_1$

இரண்டாவது மாதிரியின் உறுப்புகளின் மதிப்புகள் $= n_2 \cdot \bar{x}_2$

இவ்விரண்டு மாதிரிகளை ஒன்றாகக் கொண்ட தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $\Big\} = n_1 + n_2$.

எனவே, தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி ($\bar{x}$)ஐ

$\bar{x} = \dfrac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கிறது.

இவ்வாறே, தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை வரையறுக்கும் சமன்பாடு :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{r=1}^{n_1+n_2} (x_r - \bar{x})^2$$

$$(n_1+n_2)\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n_1} (x_r-\bar{x})^2 + \sum_{r=1}^{n_2} (x_r - \bar{x})^2$$

$$= \Sigma \left\{(x_r-\bar{x}_1)+(\bar{x}_1-\bar{x})\right\}^2 + \Sigma \left\{(x_r-\bar{x}_2) + (\bar{x}_2 - \bar{x})\right\}^2$$

$$= \Sigma (x_r-\bar{x}_1)^2 + 2(\bar{x}_1-\bar{x}) \Sigma (x_r-\bar{x}_1)+n_1 (\bar{x}_1-\bar{x})^2$$
$$+ \Sigma (x_r-\bar{x}_2)^2+2(\bar{x}_2-\bar{x}) \Sigma (x_r-\bar{x}_2) + n_2 (\bar{x}_2-\bar{x})^2.$$

ஆனால் $\sum_{r=1}^{n_1} (x_r-\bar{x}_1)=0 = \sum_{r=1}^{n_2} (x_2-\bar{x}_2)$ என்றறிவதால், $(\bar{x}_1-\bar{x})$, $(\bar{x}_2-\bar{x})$ களை முறையே d_1, d_2 எனக் கொண்டு,

$$(n_1 + n_2)\sigma^2 = \Sigma (x_r-\bar{x}_1)^2 + n_1 d_1^2 + \Sigma(x_r-\bar{x}_2)^2 + n_2 d_2^2$$

$$= n_1 \sigma_1^2 + n_1 d_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_2 d_2^2$$

ஆதலால்

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1+n_2} \left[n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2) \right]$$

மாதிரி :

இரு மாதிரிக் கூறுகளுக்கான விவரங்கள் பின்வருமாறு :

I	II
$n_1=20$	$n_2=30$
$\bar{x}_1=25$	$\bar{x}_2=20$
$\sigma_1^2=5$	$\sigma_2^2=4$

இக் கூறுகளை ஒன்று சேர்த்து உண்டாகும் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

நியதியின்படி $\bar{x} = \dfrac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{20 \times 25 + 30 \times 20}{20 + 30}$$

$$= \frac{500 + 600}{50}$$

$$= \frac{1100}{50}$$

$$= 22.$$

இங்கு $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 25 - 22 = 3$; $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 20 - 22 = -2$ எனவே நியதியின் வாயிலாக

$(n_1 + n_2)\sigma^2 = n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)$, நாம் அடையப் பெறுவது,

$$50\sigma^2 = 20\,(5+9) + 30\,(4+4)$$

$$= 20 \times 14 + 30 \times 8.$$

$$= 280 + 240$$

$$\sigma^2 = \frac{520}{50} = 10{\cdot}4$$

$$\therefore\ \sigma = \sqrt{10{\cdot}4} = 3{\cdot}22.$$

பயிற்சி

1. சிதறல் என்றால் என்ன ? இதைச் சில எடுத்துக்காட்டு களுடன் விளக்குக.

2. சிதறல் அளவுகோல்கள் யாவை ? அவற்றின் சிறப்புகளை யும், குறைபாடுகளையும் குறிப்பிடுக.

3. கிரிக்கெட் (cricket) ஆட்டத்தில், ஒருவன் தனித்தனியே ஒவ்வொரு ஆட்டத்திலுமெடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு

47, 41, 50, 39, 45, 48, 42, 32, 60, 20.

இவ் வோட்டங்களின் வீச்சு, கூட்டுச் சராசரி, சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(விடை : வீச்சு $=40$; கூட்டுச் சராசரி $=42 \cdot 4$; சராசரி விலக்கம் $=7 \cdot 6$; திட்ட விலக்கம் $=10 \cdot 25$.)

4. பின்வரும் இலக்கணக் கூறுகளிலுள்ள குறைகளை எடுத்துக் காட்டுக.

$$Q_1=\frac{N}{4};\ \text{இடைநிலை}=\frac{N}{2};\ Q_3=\frac{3N}{4}.$$

5. 100 பூனைகள், 100 நாய்கள் இவற்றின் எடைகளை அளந்து ஆராய்ந்ததில், பின்வரும் செய்திகள் கிடைத்தன :

(i) நாய்களின் சராசரி எடை, பூனைகளின் சராசரி எடையைவிட அதிகமாக இருந்தது.

(ii) எடைகளுக்குள்ள மாறும் தன்மை, பூனைகளின் எடைகளைவிட, நாய்களின் எடைகளில் அதிகமாகத் தென்பட்டது.

(iii) மிகச் சிறிய நாயின் எடை, மிகச் சிறிய பூனையின் எடையை ஒத்திருந்தது.

(iv) மிகப் பெரிய பூனையின் எடை, நாய்களின் சராசரி எடைகளைவிடச் சற்றுக் குறைவாக இருந்தது.

(v) பூனைகளுக்குரிய எடைகளின் அலைவுப் பரவல், இயல் நிலைக்கு ஒத்திருந்தது.

(vi) நாய்களுக்குரிய எடைகளின் அலைவுப் பரவல், நேர் கோட்டைத்தைப் பெற்றிருந்தது.

மேற்கூறிய செய்திகளை வரைபடம் மூலம் விளக்குக.

6. திட்ட விலக்கத்தின் சில சிறந்த பண்புகளை விவரி.

7. சிதறல் கெழு என்றால் என்ன ? சில சிதறல் கெழுக்களை வரையறுக்க.

8. மாறுபாட்டுக் கெழுவின் (Coefficient of Variation) பயன்கள் யாவை ?

9. கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் இவற்றினைக் காண்க.

பிரிவுக் குறிப்பெண் :	35	40	45	50	55
அலைவெண் :	2	5	8	6	4

(விடை : கூட்டுச் சராசரி = 46; கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 4·8; திட்ட விலக்கம் = 5·83.)

10. பின்வரும் அட்டவணையில் 20 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் முதலியவற்றைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள் :	30	40	50	60	70	மொத்தம்
மாணவர்கள் :	4	5	6	3	2	20

(விடை : கூட்டுச் சராசரி = 47; இடைநிலை = 46·47; முகடு = 48·75)

11. 11 மாணவர்கள் ஆங்கிலத்திலும், கணிதத்திலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு :

ஆங்கிலம் (x) :	15	25	35	40	45	50	55	60	65	70	75
கணிதம் (y) :	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

எப் பாடத்தில் மாற்றம் அதிகமாக உள்ளது ? மாற்றக் கெழுக்களைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

(விடை : xன் கூட்டுச் சராசரி = 48·6; xன் திட்ட விலக்கம் = 17·9; xன் மாற்றக் கெழு = 36%; yன் கூட்டுச் சராசரி = 50; திட்ட விலக்கம் = 31·6; மாற்றக் கெழு = 66%.)

12. 10 ஆட்டங்களில் இருவர் எடுத்த ஓட்டங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

A :	25	65	45	0	50	100	35	80	10	90
B :	40	55	50	35	50	65	45	60	40	60

யாரிடம் மாறுபாடுகள் குறைவாகக் காணப்படுகின்றன ?

(விடை : Aயின் கூட்டுச் சராசரி = 50

Bயின் ,, ,, = 50

Aயின் திட்ட விலக்கம் = 31·93

Bயின் ,, ,, = 9·48

B-இடம் மாறுபாடுகள் குறைவு.)

13. பின்வரும் அலைவெண் பரவலின் கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	7·5-12·5	12·5-17·5	17·5-22·5
அலைவெண் :	3	8	12
பிரிவு இடைவெளி	22·5-27·5	27·5-32·5	32·5-37·5
அலைவெண் :	9	6	2

(விடை : திட்ட விலக்கம் = 6·46; கால்மான விலக்கம் = 4·76; கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 1·868.)

14. 100 நாய்களின் எடைகளுக்குரிய அலைவெண் பரவல் பின்வருமாறு :

பிரிவு இடைவெளி (பவுண்டு)	3-7	8-12	13-17	18-22	23-27
அலைவெண் :	4	6	10	25	22
பிரிவு இடைவெளி (பவுண்டு)	28-32	33-37	38-42	43-47	
அலைவெண் :	15	12	4	2	

இப் பரவலின் கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம், மாற்றக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை : 5·8; 7·0; 8·8; 36%; 68%.)

15. மின் குமிழிகள் உற்பத்தி செய்யும் இரு தொழிற்சாலைகளில், மின் குமிழிகள் எரியும் நேரங்களைக் கணக்கிடுவதற்காக, ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் மாதிரித் தேர்வுகளின்மூலம் எடுத்துப் பரிசோதித்ததில் பின்வரும் செய்திகள் கிடைத்தன.

முதல் தொழிற்சாலை : எரியும் நேரத்தின் கூட்டுச் சராசரி = 2000 மணி

2ஆவது ,, : ,, ,, = 1600 மணி

முதல் தொழிற்சாலையின் திட்ட விலக்கம் = 240

2ஆவது ,, ,, = 224

எத் தொழிற்சாலையின் மின் குமிழிகள் விரும்பத்தக்கன ?

(விடை : முதல் தொழிற்சாலையின் குமிழிகள் விரும்பத்தக்கவை)

16. ஒரு டீ கம்பெனியில், இயந்திரத்தின்மூலம் 1 பவுண்டு எடையுள்ள டீ பொட்டலங்களைத் தயாரித்ததில், மாதிரித் தேர்வுகளின் வாயிலாக 10 பொட்டலங்கள் எடுத்து, அவைகளின் எடைகளை இரு தராசுகளால் எடையிட்டுக் கண்டதில் பின்வரும் விவரங்கள் கிடைத்தன.

(எடைகள் அவு.)

தராசு A:

16·72,	16·17,	16·51,	16·78,	15·96,
16·33,	16·59,	16·82,	16·14,	16·40.

தராசு B:

16·18,	15·95,	16·09,	16·28,	16·36,
16·00,	16·17,	16·27,	16·45,	16·06.

எந்தத் தராசு குறைந்த மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளது என்பதை மாறுபாட்டுக் கெழுக்களின் வாயிலாக விளக்குக.

(விடை: தராசு A: கூட்டுச் சராசரி = 16·45; திட்ட விலக்கம் = ·263
மாறுபாட்டுக் கெழு = 1·6%)

தராசு B: கூட்டுச் சராசரி = 16·18; திட்ட விலக்கம் = ·152
மாறுபாட்டுக் கெழு = 0·9%.)

17. ஒரு தேர்வில் 1,000 மாணவர்கள் ஆங்கிலத்திலும், கணிதத்திலும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அலைவெண் பரவல் அட்டவணை பின்வருமாறு :

மதிப்பெண்கள் :	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
ஆங்கிலத்தில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	3	19	131	346	340
கணிதத்தில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	20	41	98	149	192	197

மதிப்பெண்கள்	60-69	70-79	80-89	90-99	மொத்தம்
ஆங்கிலத்தில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	134	20	4	2	1000
கணிதத்தில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	152	97	44	10	1000.

பாடங்களுக்குரிய மதிப்பெண்களின் அலைவுப் பலகோணத்தை வரைந்து, பரவல்களை ஒப்பிடுக. கணக்கியலாகவும் திட்ட விலக்கங்களைக் காண்க.

18. A, B என்ற இரு மாதிரிக் கூறுகளின் செய்திகள் பின்வருமாறு :

மாதிரிக் கூறு	எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
A	20	44·8	8·3
B	30	47·3	6·5

இக் கூறுகளை ஒன்று சேர்த்து உண்டாகும் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

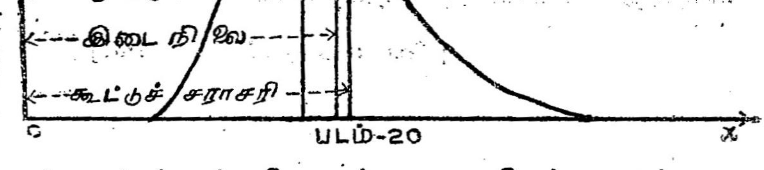
[விடை : $\bar{x} = 46{\cdot}3$, $\sigma = 7{\cdot}37$]

7. கோட்டம்

(Skewness)

ஒரே சீராக அமையாத அலேவுப் பரவலின் போக்கைக் கோட்டம் (Skewness) எனக் கூறுகிறோம். அப் பரவலின் வளைகோட்டின் உச்சிப் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலேகோட்டுக்கு இரு புறங்களிலும் ஒரே சீரான பரவலேப் பெற்றிருக்காது. ஆனல், ஒரே சீராக அமையும் அலேவுப் பரவலின் வளைகோடு, உச்சிப் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலேகோட்டின் இரு புறங்களிலும் ஒரே மாதிரியான அமைப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

ஒரே சீராக அமையும் பரவலில் கூட்டிடை, இடைநிலே, முகடு ஆகிய இம் மூன்றும் ஒன்று சேருகின்றன. அலேவெண் பாதை சீரற்ற தன்மையில் இருக்கும்பொழுது முகட்டிலிருந்து கூட்டிடையும், இடைநிலேயும் விலகுகின்றன. எனவே, முகட்டிற்கும்,



படம்-20

கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டை ஒரு கோட்டளவாகக் கருதலாம். அதாவது, ஓர் அலேவுப் பரவலின் கோட்டத்தை, அப்

பரவலின் முகட்டிற்கும், கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டினுல் சாதாரணமாக நிர்ணயிக்க முடியாது. மேலும், (கூட்டிடை — முகடு) = 3 (கூட்டிடை — இடைநிலை) என்ற அனுபவத்தில் அமைகின்ற சமன்பாட்டின்படியும், பரவலின் கோட்டத்தைக் கூட்டிடைக்கும் இடைநிலைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டை மூன்று மடங்காலும் அறியலாம்.

ஓர் அலைவுப் பரவலின் கூட்டிடையும் முகடும் ஒரே அளவாக இருந்தால், பரவலின் கோட்டம் பூஜ்யம் என்றும், கூட்டிடை முகடைவிடப் பெரிய அளவாயிருந்தால் பரவல் 'நேர் கோட்டம்' கொண்டுள்ளதென்றும், கூட்டிடை முகடைவிடக் குறைவான மதிப்பைப் பெற்றிருந்தால், பரவல் 'மாறு கோட்டம்' கொண்டுள்ள தெனவும் கருதுகிறோம்.

ஆதலால், பரவல் நேர்கோட்டத்தைப் பெற்றிருக்கக் கூட்டிடை, முகடைக் குறிக்கும் புள்ளிக்கு வலப்புறத்தில் விலக்கப்பட்டு அமைந்திருக்க வேண்டும். அதாவது, முகடைக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைகோட்டின் வலப்புறத்திலிருக்கும் பரப்பளவு, இடப்புறமுள்ள பரப்பளவைவிட அதிகமாக இருக்கும். அவ்வாறே, பரவலின் கூட்டிடை, முகடுக்கு இடப்புறத்தில் அமைந்திருந்தால், முகடைக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக்கோட்டிற்கு இடப்புறமுள்ள பரவலின் பரப்பு, வலப்புறத்திலுள்ள பரப்பைவிட அதிகமாக இருக்கும்.

சூத்திரம் : கோட்டம் = கூட்டிடை — முகடு.

= 3 (கூட்டிடை — இடைநிலை).

இக் கோட்டளவு மாறியின் மதிப்புகளை அளவிட்ட அலகு அளவுகோலினுல் குறிக்கப்படும். ஆதலால், இக் கோட்டளவைக் கொண்டு இரு மாறிகளுக்குகந்த பரவல்களின் கோட்டத்தை ஒப்பிட்டுக் காண முடியாது.

சில கோட்டக் கெழுக்களை வரையறுத்து, இரு பரவல்களுக்குள்ள கோட்ட வேறுபாட்டை ஒப்பிடுகிறோம். சாதாரண கோட்டளவுக்கும், அதற்குகந்த சிதறல் அளவுக்கும் உள்ள விகிதத்தையே 'கோட்டக் கெழு' (Coefficient of Skewness) எனக் கூறுகிறோம்.

∴ பியர்சனின் கோட்டக் கெழு (Pearson's Coefficient of Skewness) $= \frac{\text{கூட்டிடை} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}} = \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\text{S.D.}}$

$$= \frac{3\,(\text{கூட்டிடை} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}} = \frac{3\,(\text{Mean} - \text{Median})}{\text{S.D.}}$$

இச் சூத்திரத்தைக் கொண்டு கோட்டத்தை அளக்கிறோம். இக் கோட்டக் கெழுவை P எனக் குறித்து,

$P > O$ ஆனல் பரவல் நேர் கோட்டம் படைத்ததெனவும்,

$P < O$ ஆனல் பரவல் மாறு கோட்டம் படைத்ததெனவும்,

$P = O$ ஆனல் பரவல் ஒரே சீரானதெனவும் கொள்கிறோம்.

ஒரே சீரான அலைவுப் பரவலை, கால்மான அளவுப் புள்ளிகள், இடைநிலையைக் குறிக்கும் புள்ளிக்கு இரு பக்கங்களிலும், சம தூரத்தில் அமைந்து, அப் புள்ளிகளின்மூலம் வரையும் நிலைகோடுகளால் நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிப்போம்.

ஆகவே, $M - Q_1 = Q_3 - M$, M—இடைநிலை.

i.e., $Q_1 + Q_3 - 2M = O$.

அலைவெண் பரவல் வளைகோடு சீராக அமையாவிட்டால்,

$M - Q_1 > Q_3 - M$ அல்லது

$M - Q_1 < Q_3 - M$ ஆகிறது

ஆனல், ஒரே சீரான அலைவுப் பரவலின் கோட்டம் பூஜ்யம் ஆனதால், பரவலின் கோட்டத்தை '$Q_1 + Q_3 - 2M$' என்ற அளவினல் கூறலாம். ஆகவே ஒரு பரவலில்,

$Q_1 + Q_3 - 2M > O$ ஆனல், பரவல் நேர் கோட்டத்தை உடையதாகவும்,

$< O$ ஆனல் பரவல் மாறு கோட்டத்தை உடையதாகவும்,

$= O$ ஆனல் கோட்டத்தைப் பூஜ்யமாகவும் கருதுகிறோம்.

இக் கோட்ட அளவைக் கெழுவாக மாற்ற '$Q_1 + Q_3 - 2M$'ஐ இடைக் கால்மான வீச்சினால் வகுக்கிறோம்.

∴ சூத்திரம் :

கால்மானக் கோட்டக் கெழு (Quartile Coefficient of Skewness)

$$= \frac{Q_1 + Q_3 - 2\,M}{Q_3 - Q_1}.$$

மாதிரி :

கீழ்வரும் அலைவெண் பரவலின் கோட்டக் கெழுக்களைக் காண்.

பிரிவு இடை வெளி	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	மொத்தம்
அலை வெண்	3	5	8	10	7	5	2	40

$\bar{x}$ = பரவலின் கூட்டிடை = 46·50

M = இடைநிலை = 46·50

முகடு = 46·83

σ = திட்ட விலக்கம் = 7·50

Q_1 = கீழ்க் கால்மானம் = 40·75

Q_3 = மேல் கால்மானம் = 52·35

∴ பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \frac{\text{கூட்டிடை} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$.

$$= \frac{46{\cdot}50 - 46{\cdot}83.}{7{\cdot}50}$$

$$= -\frac{0{\cdot}33}{7\ 50}.$$

$$= -\frac{0 \cdot 11}{2 \cdot 50}.$$

$$= -\frac{11}{250}.$$

$$= -0 \cdot 044$$

$$\text{கால்மானக் கோட்டக் கெழு} = \frac{Q_1 + Q_3 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{0 \cdot 10}{11 \cdot 60}.$$

$$= 0 \cdot 01.$$

பயிற்சி

1. பின்வரும் அலைவெண் பரவலின் கோட்டக் கெழுக்களைக் காண்.

பிரிவு இடை வெளி :	39-41	42-44	45-47	48-50	51-53	54-56	57-59	60-62	63-65
அலை வெண் :	3	11	50	105	124	70	30	6	1

[விடை : பியர்சனின் கோட்டக் கெழு = $-0 \cdot 11$
கால்மானக் கோட்டக் கெழு = $-0 \cdot 02$]

2. A, B என்ற இரு தொகுதிகளுக்குகந்த புள்ளியியல் அளவைகள் பின்வருமாறு :

	A	B
இடைநிலை	20	25
கீழ்க் கால்மானம் ...	12	15
மேல் கால்மானம் ...	23	36

இத் தொகுதிகளுக்குள்ள சிதறல், கோட்டம் ஆகியவற்றில் தென்படும் வேற்றுமைகளை விளக்கிடுக.

[விடை : { சிதறல் கெழு : A (·1375) ; B (·42)
கோட்டக் கெழு : A (·428) ; B (·047) }]

3. கீழ்வரும் அலைவெண் பரவலுக்குரிய பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவையும், கால்மானக் கோட்டக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

மாறி	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
அலைவெண்	2	5	7	13	21	16	8	3

[விடை : பியர்சனின் கோட்டக் கெழு = −1· 17
கால்மானக் கோட்டக் கெழு = −0·055]

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலுக்குரிய 'பியர்ஸனின்' கோட்டக் கெழுவையும், கால்மானக் கோட்டக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	3·0-3·9	4·0-4·9	5·0-5·9	6·0-6·9	7·0-7·9	8·0-8·9
அலைவெண்	1	7	28	78	84	45

பிரிவு இடைவெளி	9·0-9·9	10·0-10·9	11·0-11·9	மொத்தம்
அலைவெண்	28	7	2	280.

{ விடை : பியர்சனின் கோட்டக் கெழு = 0·15
கால்மானக் கோட்டக் கெழு = 0·0491. }

8. உடன் தொடர்பு

(Correlation)

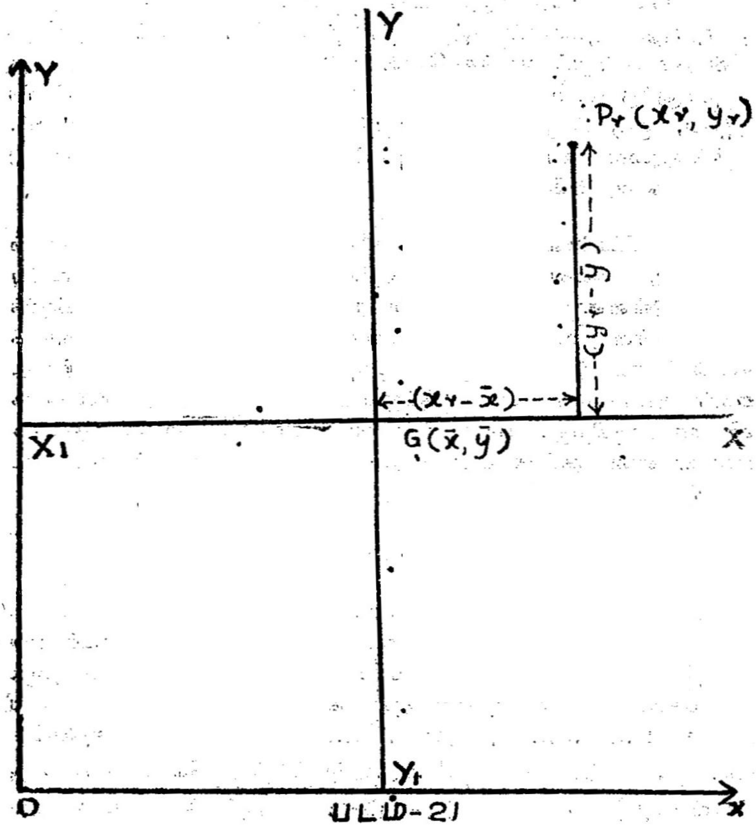
ஒரு மாறிக்குகந்த உறுப்பு மதிப்புகளின் பரவலைப் பற்றி முன்னமே ஆராய்ந்தோம். ஒரு மாதிரியிலுள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் சில குணங்களை ஒரே சமயத்தில் பெற்றிருக்கின்றன என்பதை நாம் அறிவோம். இக் குணங்களுக்குள்ள தொடர்பைப் பற்றியறிய, நாம் அக் குணங்களை ஏற்கும் உறுப்புகளின் மதிப்புகளுக்குள்ள உடன் தொடர்பைக் கொண்டு வெளிப்படுத்துகிறோம். உதாரணமாக, ஒரு தானியத்தின் உற்பத்தி அதிகரிக்க அதிகரிக்க, அதன் விலை குறைந்துகொண்டே வரும் என்றும், உற்பத்தி குறையக் குறைய விலை அதிகரிக்கும் என்றும் அறிகிறோம். அம் மாதிரியே ஒரு பொருளின் தேவை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, பொதுவாக, அதன் விலையும் அதிகரித்துக் கொண்டே வரும்; அப் பொருளின் தேவை குறைந்தால், விலையும் தானகவே குறைகிறது. ஆகையால் இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே சமயத்தில் அதிகரித்துக் கொண்டோ, அல்லது குறைந்து கொண்டோ சென்றால், அவ்விரு மாறிகளும் நேரான தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும், ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் அதிகரிக்க, மற்றொன்றின் மதிப்புகள் குறைந்து கொண்டு வந்தால், அவ்விரு மாறிகளும் எதிர்த் தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும் சொல்கிறோம். ஒரு குழுவிலுள்ள மனிதர்களின் உயரமும், பளுவும் 'நேர் உடன் தொடர்பை'க் (Positive correlation) கொண்டுள்ளன. ஏனெனில், சாதாரணமாக அதிக உயரமுள்ளவர்கள் அதிக எடை உள்ளவர்களாகவும், குட்டையான வர்கள் குறைந்த எடை உள்ளவர்களாகவும் இருக்கின்றனர். சாதாரணமாக, ஆரும் வகுப்பிற் படிக்கும் மாணவர்களின் வயதும் (chronological age) அவர்களின் படிப்பின் திறமையும் (Scholastic ability), எதிரிடை உடன் தொடர்பைப் (Negative correlation) பெற்றுள்ளன. ஏனெனில் அதிக வயதுள்ள மாணவர்கள், படிப்பிற் சிறிது மந்தமாகவும், குறைந்த வயதுள்ள மாணவர்கள் படிப்பில் மிகவும் திறமைசாலிகளாகவும் விளங்குகின்றனர்.

இரண்டு மாதிரிகளுக்குள்ள தொடர்பை மட்டும் அறிந்தால் போதாது. அவைகள் எந்த அளவிற்குத் தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். ஆகையால், இரு மாறிகளுக்குள்ள உறவை (inter dependence) புள்ளியியல் வாயிலாக அறிய, ஒரு கெழுவை வரையறுத்து, அதன்மூலம் அளக்கிறோம். இக் கெழுவை ' உடன் தொடர்புக் கெழு ' (Correlation coefficient) என்று கூறுகின்றோம்.

சில சிக்கல்களில், பல மாறிகளை, ஒரே சமயத்தில் ஆராயும் பொழுது, அவைகள் எவ்விதத்தில் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்று அறிய முடிகிறது. மாறிகளின் ஒன்றுக்கொன்றுள்ள உறவை, அவைகளின் 'உடன் தொடர்புக் கெழு'க்களைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கமுடிகிறது. உயிர் நூலில் தந்தை, மகன் இவர்களின் உயரங்களுக்குள்ள தொடர்பைப் புள்ளியியலாக விளக்க முடிகிறது. பசுக்களின் வயதிற்கும், அவைகள் கறக்கும் பாலின் எடைக்கும் உள்ள உறவை, இம் முறையினுற் கணக்கிட முடிகிறது.

சிதறல் விளக்கப் படம் (Scatter Diagram)

x, y என்பன இரண்டு ராண்டம் மாறிகளைக் (random variables) குறிக்கட்டும். அவைகள் எந்த அளவில் தொடர்பைப் பெற்றிருக்கின்றன என்று ஆராய்வோம். x, y மாறிகளின் n ஜதை மதிப்புகளை ஒரே சமயத்தில் அளக்கவும். அவைகளை, (x_1, y_1); (x_2, y_2); .... (x_r, y_r); .... (x_n, y_n) எனக் குறிப்பிடவும். [x, yகளின் மதிப்புகளைப் பூஜ்யத்திற்கு மேல், வருமாறு கொள்ளவும்]. வரைபடத் தாளில் x, y அச்சுக்களை வரைந்து, அவைகள் வெட்டுமிடத்தை O எனக் குறிப்பிடவும். தகுந்த அலகு (ஸ்கேலை) எடுத்து x, y அச்சுக்களில் முறையே x, y மதிப்புகளுக்குகந்த புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். ஜதைகளில் வரும் முதல் எண்களைக் கிடை (அச்சு)த் தூரங்களாகவும் (x-axis), இரண்டாவதாக வரும் எண்களை நிலை (அச்சு)த் தூரங்களாகவும் (y-axis) கொண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கவும், அவைகளுக்கு, வரைபடத்தில் முறையே, $P_1 (x_1, y_1)$; $P_2 (x_2, y_2)$; .... $P_r (x_r, y_r)$; .... $P_n (x_n, y_n)$ எனப் பெயரிடவும். எண் மதிப்பாற் கொடுக்கப்பட்ட விளக்கங்கள் வரைபடத்திற் புள்ளிகளாக மாற்றியமைக்கப்பட்டுள்ளன. இப் புள்ளிகளைக் கொண்ட வரைபடத்தைச் 'சிதறல் விளக்கப் படம்' (Scatter diagram) எனச் சொல்கிறோம்.



படம்-21

இப் படத்தைக் கொண்டு x, y மாறிகள் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் உடன் தொடர்பைப் பெற்றுள்ளனவா என்றும், அப்படியானல் அத் தொடர்பை நேர்கோட்டுச் சம்பந்தமாக (linear relationship) ஏறக் குறைய முறைபடுத்திக் கூற முடியுமா என்றும் தீர்மானிக்கலாம்.

n புள்ளிகளை உற்று ஆராயும்பொழுது, அவைகள் நன்ருக வரையறுக்கப்பட்ட கோடுகள் அல்லது வளைகோடுகளைச் சுற்றிலும் மிகவும் நெருக்கமாக முன்னும் பின்னும் அமைகின்றனவா என்பது புலப்படும். அக் கோடுகளையே 'மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் அல்லது ரெக்ரெஷன் கோடுகள்' (Regression lines) எனவும், அல்லது ரெக்ரெஷன் வளைகோடுகள் (Regression curves) எனவும் அழைக்கின்றோம்.

x, y மாறிகளின் கூட்டிடைகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை முறையே $\bar{x}$, $\bar{y}$ எனக் கொள்ளவும். $(\bar{x}, \bar{y})$ ஜதை மதிப்பை வரை படத்தில் G என்னும் புள்ளி குறிக்கட்டும். G இன் வழியாக, x அச்சிற்கும், y அச்சிற்கும் இணையாக, X'GX, Y'GY என்ற புதிய அச்சுகளை வரையவும். இப் புதிய அச்சுகள் வரைபடத் தாளை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. சிதறல் விளக்கப் படத்தில் உள்ள புள்ளிகள், நான்கு பாகப் பிரிவுகளிலும் பரவியிருப்பதைக் கவனிக்கவும். $x_r - \bar{x}$, $y_r - \bar{y}$ என்பன x_r, y_r கள், $\bar{x}$, $\bar{y}$ களிலிருந்து விலக்கப்பட்டிருக்கும் வேறுபாடுகளின் அளவைத் தெரிவிக்கின்றன. மேலும் $\sigma x^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_r - \bar{x})^2$; $\sigma y^2 = \frac{1}{n} \Sigma (y_r - \bar{y})^2$ என்பன முறையே x, y மாறிகளின் தனித்த மாற்றத்தைத்தான் (variance) தெரிவிக்கின்றன. ஆனால் $\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ என்ற அளவு, x, y மாறிகளுக்குள்ள உடன் மாற்றத்தை வெளிப்படுத்துகிறது. சிதறல் வரைபடத்தில் $P_r(x_r, y_r)$ என்னும் புள்ளி, முதற் பகுதியில் (first quadrant) வருமானல் $x_r - \bar{x} > 0$, $y_r - \bar{y} > 0$, $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y}) > 0$ ஆகவும், இரண்டாம் பகுதியில் (second quadrant) வருமானல் $x_r - \bar{x} < 0$, $y_r - \bar{y} > 0$, $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y}) < 0$ ஆகவும், மூன்றும் பகுதியில் (third quadrant) வருமானல் $x_r - \bar{x} < 0$, $y_r - \bar{y} < 0$, $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y}) > 0$ ஆகவும், நான்காம் பகுதியில் (fourth quadrant) வருமானல் $x_r - \bar{x} > 0$, $y_r - \bar{y} < 0$, $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y}) < 0$ ஆகவும் ஏற்படுகின்றன. சிதறல் வரைபடத்திலுள்ள புள்ளிகள் மொத்தத்தில் பெரும்பாலாக 1, 3ஆம் பகுதிகளில் காணப்பட்டால், அப் புள்ளிகளுக்குகந்த $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யத்திற்குமேல், மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். 2, 4ஆம் பகுதிகளில் வரும் ஏனைய புள்ளிகளுக்கு $(x_r - \bar{x}) \times (y_r - \bar{y})$ன் மதிப்புகள், பூஜ்யத்திற்குக் குறைவாக உள்ளன. ஆதலால், $\Sigma (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ என்ற கூடுதலில் $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ன் மதிப்பு அதிக தடவைகள் பூஜ்யத்திற்கு மேலும், குறைந்த தடவைகள் பூஜ்யத்திற்குக் குறைவாகவும் ஏற்படுகின்றன. அதாவது, மொத்தத்தில் $\Sigma (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y}) > 0$ ஆக அமைகிறது. இச் சந்தர்ப்பத்தில், x, y மாறிகளின் தொடர்பை, 'நேர் இடைத் தொடர்பாக'க் கருதுகிறோம். புள்ளிகள் பெரும்பாலாக, இரண்டாவது, நான்காவது பகுதிகளிலமைந்திருந்தால், $\Sigma (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ என்ற கூடுதலில், $(x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})$ அதிகமான தடவை பூஜ்யத்திற்குக் குறைவான மதிப்புகளையும், குறைந்த தடவைகள் பூஜ்யத்திற்கு மேல், மதிப்பு

களையும் பெறுகின்றன. எனவே, $\Sigma (x_r - \bar{x}) (y_r - \bar{y}) < 0$ ஆக அமைகின்றது. இச் சந்தர்ப்பத்தில், x, y மாறிகளின் தொடர்பை, 'எதிரிடைத் தொடர்பாக'க் கருதுகிறோம். புள்ளிகள், G ஐச் சுற்றிலும் ஒரு வட்டத்திற் சீராகப் பரவியிருந்தால், $\Sigma (x_r - \bar{x}) (y_r - \bar{y}) = 0$ ஆக அமைகிறது. இச் சந்தர்ப்பத்தில் x, y மாறிகளைத் 'தொடர்பற்றது' (uncorrelated) எனக் கொள்கிறோம்.

x, y மாறிகளின் தொடர்பை, $\frac{1}{N} \Sigma (x_r - \bar{x}) (y_r - \bar{y})$ ஆனது விளக்குவதால், இதை x, y மாறிகளின் 'உடன் மாற்றம்' (co-variance) என்று கூறுகிறோம். இதை ρ_{xy} என்று குறிப்பது வழக்கம். இம் மாற்றத்தின் மதிப்பு, x, y மாறி அலகுகளால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. உடன் மாற்றம், அலகுகளினுல் பாதிக்கப்படாமலிருக்க, அதை $\sigma x . \sigma y$ ஆல் வகுத்து, ஒரு கெழுவை அமைக்கிறோம். அக்கெழுவையே 'உடன் தொடர்புக் கெழு' (coefficient of correlation) என்று கூறுகிறோம். கெழுவைச் சாதாரணமாக r என்ற எழுத்தால் குறிக்கிறோம்.

சூத்திரம் :

$$r = \text{உடன் தொடர்புக்கெழு} = \frac{\frac{1}{n} . \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x}) (y_r - \bar{y})}{\sigma x . \sigma y}$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x}) (y_r - \bar{y})}{n . \sigma x . \sigma y}$$

உடன் தொடர்புக் கெழுவைப் பின்வருமாறும் நிர்ணயிக்கலாம். x, y மாறிகளை, அவைகளுக்குகந்த அலகு அளவுகோல்களால் பாதிக்கப்படாமலிருக்க, தரப்படுத்தப்பட்ட (standardised) மாறிகளாக மாற்றவும். $u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma x}$, $v = \frac{y - \bar{y}}{\sigma y}$ என்பன x, y மாறிகளின் தரப்படுத்தப்பட்ட மாறிகள். (x_r, y_r), $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ என்ற n ஜோடி மதிப்புகளை, (u_r, v_r), $r = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ என்ற n ஜோடி தரப்படுத்தப்பட்ட மதிப்புகளாக மாற்றவும். $u_r \times v_r$ களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடவும். இதுவே, x, y களின் 'உடன் தொடர்புக் கெழு' ஆகும்.

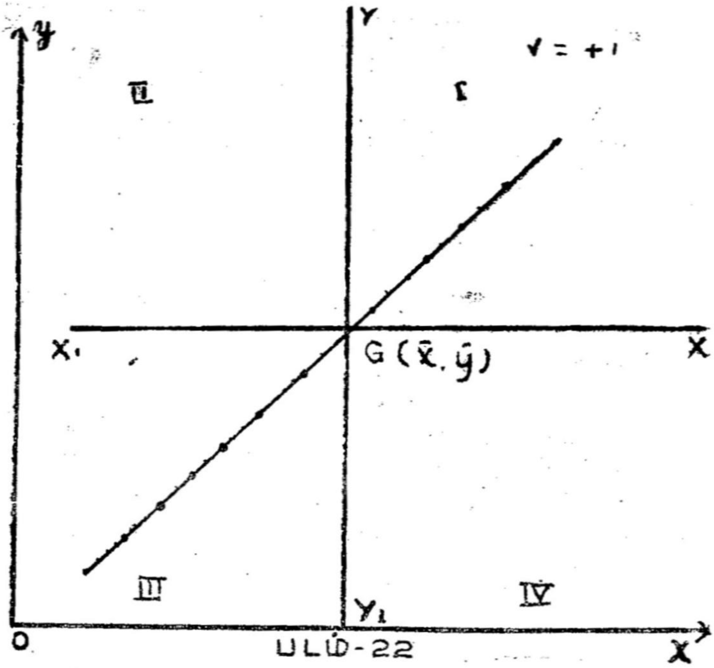
$$\text{உடன் தொடர்புக் கெழு} = \frac{1}{n} \Sigma u_r v_r.$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \left\{ \frac{x_r - \bar{x}}{\sigma x} \right\} \left\{ \frac{y_r - \bar{y}}{\sigma y} \right\}.$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\Sigma (x_r - \bar{x})(y_r - \bar{y})}{\sigma x \cdot \sigma y}.$$

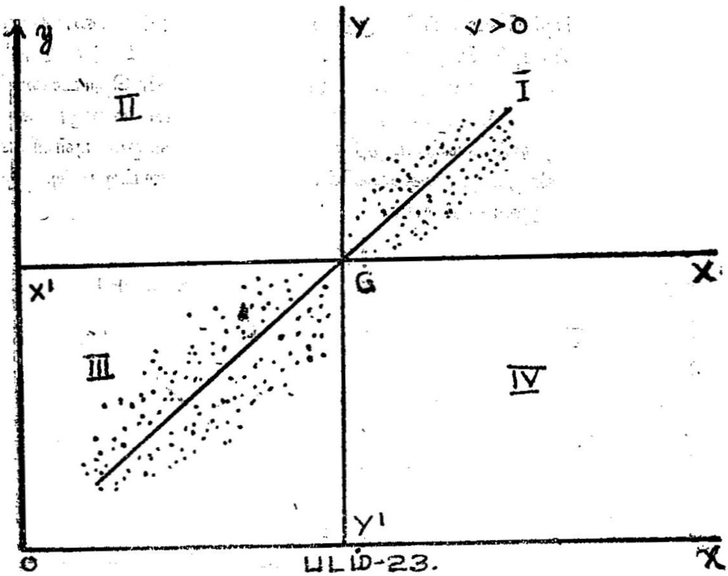
$$\boxed{r = \frac{\rho xy.}{\sigma x \cdot \sigma y}}$$

உடன் தொடர்புக் கெழு எப்பொழுதும் '-1லிருந்து $+1$ வரையிலான எந்த மதிப்புகளையும் பெற முடியும்'. அதாவது $(-1 \leqslant r \leqslant +1)$. $r = +1$ என்றால், x, y மாறிகள் 'பூரண நேர் உடன் தொடர்பை'ப் (direct positive correlation) பெற்றிருக்கின்றன என்று கூறுகின்றோம். சிதறல் வரைபடத்தில் (படம் 22) வரும் புள்ளிகள், ஒன்றாவது, மூன்றாவது பகுதிகளில், படத்திற் காட்டியபடி ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன.



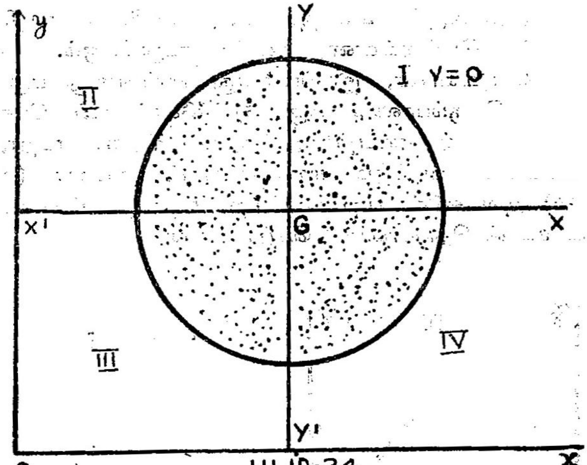
படம்-22

$r = +1$ என்று வருவதற்கு உதாரணம். ஒரு குழுவிலுள்ள ஒவ்வொரு மனிதனின் உயரத்தையும் அளக்கவும். பிறகு, அவர்களின் கைகளை அண்டைப் பக்கத்திற் கிடையாக நீட்டச் செய்து, இரு கோடிகளுக்குள்ள கிடைத்தூரத்தை அளந்து, உயரத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் அவர்களின் உயரமும், கிடைத்தூரமும் 'பூரண நேர் உடன் தொடர்பை'ப் (direct positive correlation) பெற்றிருக்கும் என அறியலாம்.



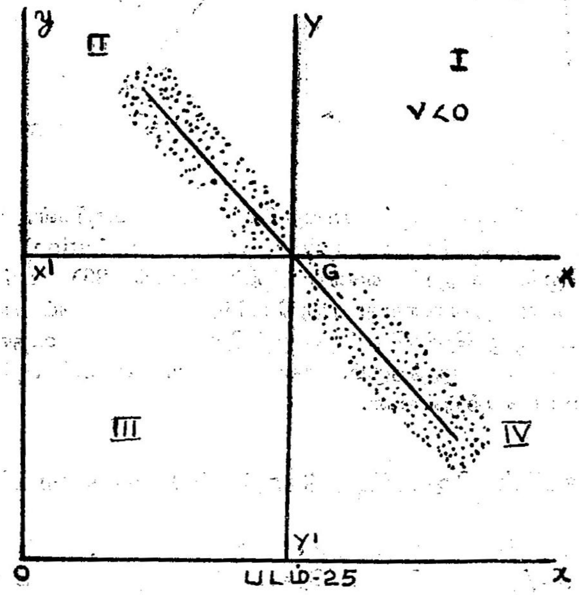
படம்-23.

$r > 0$ ஆக வரும் சமயத்தில் x, y மாறிகள் 'நேர் உடன் தொடர்பைப்' பெற்றுள்ளன என்று கூறுகிறோம். சிதறல் வரைபடத்தில் (படம் 23) ஒன்றாவது, மூன்றாவது பகுதிகளில், புள்ளிகள், பெரும்பாலாக, படத்தில் காட்டியபடி, ஒரு நேர்க்கோட்டை நோக்கி மேலும் கீழும் நெருக்கமாக அமைகின்றன. $r > 0$ க்கு உதாரணம். ஒரு குழுவிலுள்ள மனிதர்களின் உயரமும், பளுவும் 'நேர் உடன் தொடர்பைப்' பெற்றிருக்கின்றன.



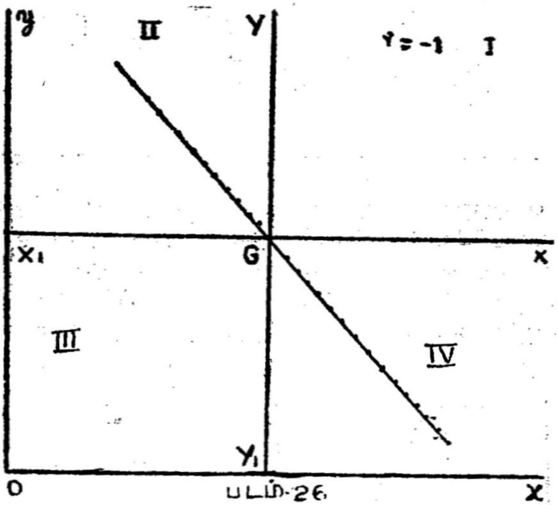
படம்-24

$r = 0$ ஆகும் சமயத்தில், x, y மாறிகளை 'தொடர்பற்றதாகக்' கருதுகிறோம். சிதறல் வரைபடத்தில், புள்ளிகள், G ஐச் சுற்றிலும், ஒரு வட்டத்திற்குள், ஒரே சீராக (படம் 24) அமைகின்றன. $r = 0$-க்கு உதாரணம். மனிதனின் உயரத்திற்கும், அவனது புத்தி கூர்மைக்கும் ஒருவிதத் தொடர்பும் கிடையாது.



படம்-25

$r < 0$ ஆக வரும் சமயத்தில் x, y மாறிகள், 'எதிரிடைத் தொடர்பைப்' பெற்றுள்ளன எனக் கூறுகிறோம். சிதறல் வரைபடத்தில், புள்ளிகள், இரண்டாவது நான்காவது பகுதிகளில் (படம் 25) பெரும்பாலாக ஒரு நேர்க்கோட்டைப் போக்காகக் கொண்டு படத்திற் காட்டியபடி அமைகின்றன. உதாரணம்: ஆரம்பப்பள்ளியில் படிக்கும் மாணவர்களின் வயதும் (chronological age) அவர்களின் படிப்பின் திறமையும் (scholastic ability) 'எதிரிடை உடன் தொடர்பைப்' பெற்றுள்ளன.



படம் 26

$r = -1$ ஆக வரும் சமயத்தில், x, y மாறிகள், 'பூரண எதிரிடைத் தொடர்பைப்' (direct inverse correlation) எனச் சொல்கிறோம். சிதறல் வரைபடத்தில் (படம் 26) புள்ளிகள், இரண்டாவது நான்காவது பகுதிகளில், ஒரே சீராகப் படத்திற் காட்டியபடி, ஒரு நேர்க்கோட்டில் முற்றிலும் அமையும். உதாரணம்: ஒரு வாயுவின் அழுத்தமும், கன அளவும் பூரண எதிரிடைத் தொடர்பைப் பெற்றுள்ளன.

மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் (Regression Lines)

சிதறல் விளக்கப் படத்திலுள்ள (Scatter diagram) புள்ளிகளின் போக்குக்குகந்த 'மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளை'க் கணக்கிய

லாகக் 'குறைந்த வர்க்க முறை' (Principle of least squares) யின் அடிப்படைக் கொள்கையைக்கொண்டு நிர்ணயிக்கமுடியும்.

y மாறியை, x மாறியின் வாயிலாக மதிப்பிடும் ரெக்ரெஷன் நேர்க் கோட்டை,

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma y} = r.\ \frac{x-\bar{x}}{\sigma x}$$

$$i.e.\ \ y-\bar{y}=r.\ \frac{\sigma y}{\sigma x}.\ (x-\bar{x}),\quad \left[\ r=\frac{\rho}{\sigma x.\sigma y}\ \right]$$

$i.e.\ y-\bar{y}=\frac{\rho}{\sigma x^2}.\ (x-\bar{x})$ என்ற சமன்பாடும்,

x மாறியை, y மாறியின் வாயிலாக மதிப்பிடும் ரெக்ரெஷன் நேர்க்கோட்டை,

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma x} = r\ \frac{(y-\bar{y})}{\sigma y}.$$

$$i.e.\ x-\bar{x}=r\ \frac{\sigma x}{\sigma y}.\ (y-\bar{y})$$

$i.e.\ \ x-\bar{x}=\frac{\rho}{\sigma y^2}.\ (y-\bar{y})$ என்ற சமன்பாடும் நிலை நாட்டுகின்றன. $\frac{\rho}{\sigma x^2}$, $\frac{\rho}{\sigma y^2}$ என்பன 'மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்கள்' (Regression coefficients) என்று கூறப்படுகின்றன. இக் கெழுக்களின் பெருக்குச் சராசரியே (Geometric Mean) 'உடன் தொடர்புக் கெழு' (Correlation coefficients) ஆகிறது. ஏனெனில்,

$$r = \frac{\rho}{\sigma x\ .\ \sigma y} = \sqrt{\frac{\rho}{\sigma x^2} \times \frac{\rho}{\sigma y^2}}.$$

மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள், ஒன்றையொன்று, G $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

$r = +1$ ஆனல் (ரெக்ரெஷன் கோடுகள்), மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றின் மேலொன்று பூர்த்தியாகப் பொருந்துகின்றன. ஏனெனில், ரெக்ரெஷன் கோடுகளை நிர்ணயிக்கும் சமன்பாடுகளிரண்டும் ஒரே மாதிரியான (*i.e.*) $\frac{y-\bar{y}}{\sigma y} = \frac{x-\bar{x}}{\sigma x}$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்பெறுகின்றன. அப்பொழுது ரெக்ரெஷன் கோடு படம் 22-ல் உள்ளதைப்போன்று அமைகிறது.

$r = -1$ ஆக ஆகும்பொழுதும், ரெக்ரெஷன் கோடுகள் ஒன்றின்மேலொன்று, படம் 26-ல் காட்டியதுபோல அமைகின்றன.

அப்பொழுது ரெக்ரெஷன் கோடு $\frac{y-\bar{y}}{\sigma y} = -\frac{x-\bar{x}}{\sigma x}$ என்ற சமன்பாட்டால் நிறுவப்படுகிறது.

$r=0$ ஆகும்பொழுது, ரெக்ரெஷன் கோடுகள், $y-\bar{y}=0$. *i.e.* $y=\bar{y}$; $x-\bar{x}=0$. *i.e.* $x=\bar{x}$ என்ற சமன்பாடுகளால் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. அப்பொழுது G வழியாகச் செல்லும் புதிய அச்சுகளே ரெக்ரெஷன் கோடுகளாகின்றன.

உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட உபயோகிக்கும் சூத்திரங்கள்.

சூத்திரம் 1 :

$$r = \frac{1}{n} \frac{\Sigma (x_r-\bar{x})(y_r-\bar{y})}{\sigma\bar{x}.\sigma y}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}. \Sigma (x_r-\bar{x})(y_r-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_r-\bar{x})^2}. \sqrt{\frac{1}{n}. \Sigma (y_r-\bar{y})^2}}$$

(x_r, y_r), $r=1, 2, 3, \ldots\ldots n$ என்பன, x, y மாறிகளின் n ஜதை மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். r-ஐக் கணக்கிட கீழ்க்கண்ட அட்டவணை தயாரிக்கவும்.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x_r; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \Sigma y_r.$$

x_r	y_r	$x_r-\bar{x}$	$y_r-\bar{y}$	$(x_r-\bar{x})(y_r-\bar{y})$	$(x_r-\bar{x})^2$	$(y_r-\bar{y})^2$
Σx_r	Σy_r			$\Sigma(x_r-\bar{x})(y_r-\bar{y})$	$\Sigma(x_r-\bar{x})^2$	$\Sigma(y_r-\bar{y})^2$.

$$\sigma x = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_r-\bar{x})^2}\,;$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{1}{n}.\Sigma(y_r-\bar{y})^2}.$$

$$\rho = \frac{1}{n}.\Sigma(x_r-\bar{x})(y_r-\bar{y})$$

$$\therefore\ r = \frac{\rho}{\sigma x\,.\,\sigma y}.$$

சூத்திரம் 2 :

$$r = \frac{\frac{1}{n}.\ \Sigma x_r y_r - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x_r^2-\bar{x}^2}.\ \sqrt{\frac{1}{n}.\Sigma y_r^2-\bar{y}^2}.}$$

x_r	y_r	$x_r y_r$	x_r^2	y_r^2.
Σx_r	Σy_r	$\Sigma x_r y_r$	Σx_r^2	Σy_r^2.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} . \Sigma x_r$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} . \Sigma y_r$$

$$\sigma x = \sqrt{\frac{1}{n} . \Sigma x_r^2 - \bar{x}^2}.$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{1}{n} . \Sigma y_r^2 - \bar{y}^2}.$$

$$\rho = \frac{1}{n} . \Sigma x_r y_r - \bar{x}\bar{y}.$$

$$\therefore r = \frac{\rho}{\sigma x . \sigma y}.$$

சூத்திரம் 3 :

$$r = \frac{\frac{1}{n} . \Sigma (x_r - a)(y_r - b) - d_1 d_2}{\sqrt{\frac{1}{n} . \Sigma (x_r - a)^2 - d_1^2} . \sqrt{\frac{1}{n} . \Sigma (y_r - b)^2 - d_2^2}}.$$

இங்கு $d_1 = \bar{x} - a$; $d_2 = \bar{y} - b$.

x_r	y_r	$x_r - a$	$y_r - b$	$(x_r - a)(y_r - b)$	$(x_r - a)^2$	$(y_r - b)^2$
Σx_r	Σy_r	$\Sigma (x_r - a)$	$\Sigma (y_r - b)$	$\Sigma (x_r - a)(y_r - b)$	$\Sigma (x_r - a)^2$	$\Sigma (y_r - b)^2$.

மாதிரி 1 :

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தில், x, y களின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண். ரெக்ரெஷன் கோடுகளைத் தெரிவிக்கும் சமன் பாடுகளையும் காண். (Model paper B.A., Minor.)

x :	1	5	15	12	13	6
y :	13	16	28	22	24	12.

x_r	y_r	$x_r y_r$	x_r^2	y_r^2
1	13	13	1	169
5	16	80	25	256
15	28	420	225	784
12	22	264	144	484
13	24	312	169	576
6	12	72	36	144
52	115	1,161	600	2,413

$$\bar{x} = \frac{1}{n} . \Sigma x_r = \frac{1}{6} \times 52 = 8{\cdot}66.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} . \Sigma y_r = \frac{1}{6} \times 115 = 19{\cdot}16.$$

$$\sigma x = \sqrt{\frac{1}{n} . \Sigma x_r^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{6} . 600 - (8{\cdot}66)^2}$$

$$= \sqrt{100 - 74{\cdot}\ 9956.} = \sqrt{25{\cdot}0044.} = 5$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{1}{n} . \Sigma y_r^2 - \bar{y}^2.} = \sqrt{\frac{1}{6} . 2413 - (19{\cdot}2)^2}$$

$$= \sqrt{402{\cdot}16 - 368{\cdot}64} = \sqrt{33{\cdot}52.} = 5{\cdot}8$$

$$\rho xy = \frac{1}{n} . \Sigma x_r y_r - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{6} . 1161 - 166{\cdot}272.$$

$$= 193{\cdot}500 - 166{\cdot}272 = 27{\cdot}228.$$

$$r = \frac{\rho}{\sigma x . \sigma y} . = \frac{27{\cdot}228}{5 \times 5{\cdot}8} = \frac{27{\cdot}228}{29{\cdot}0} = 0{\cdot}94.$$

y-மாறியை, x-மாறியின் வாயிலாக மதிப்பிடும் ரெக்ரெஷன் கோட்டை நிர்ணயிக்கும் சமன்பாடு :

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma y} = r. \frac{x-\bar{x}}{\sigma x}. \ i.e. \ \frac{y-19{\cdot}2}{5{\cdot}8} = 0{\cdot}94. \frac{(x-8{\cdot}66)}{5}$$

$$\therefore \quad y - 19{\cdot}2 = \frac{5{\cdot}8 \times 0{\cdot}94}{5} (x - 8{\cdot}66)$$

$$\therefore \quad y - 19{\cdot}2 = 1{\cdot}16 \times 0{\cdot}94 (x - 8{\cdot}66)$$

$$= 1{\cdot}0904 \, x - 1{\cdot}0904 \times 8{\cdot}66.$$

$$\therefore \quad y = 1{\cdot}0904 \, x + 19{\cdot}2 - 9{\cdot}4494.$$

$$\boxed{y = 1{\cdot}0904 \, x + 9{\cdot}75}$$

x-மாறியை, y-மாறியின் வாயிலாக மதிப்பிடும் ரெக்ரெஷன் கோட்டை நிர்ணயிக்கும் சமன்பாடு :

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma x} = r. \frac{y-\bar{y}}{\sigma y}. \quad i.e. \ \frac{x-8{\cdot}66}{5} = 0{\cdot}94 \ \frac{(y-19{\cdot}2)}{5{\cdot}8}$$

$$x - 8{\cdot}66 = \frac{5 \times {\cdot}94}{5{\cdot}8} (y - 19{\cdot}2)$$

$$i.e. = \frac{4{\cdot}7}{5{\cdot}8} (y - 19{\cdot}2)$$

$$= 0{\cdot}8 \, y - 15{\cdot}36$$

$$\therefore x = 0{\cdot}8 \, y + 8{\cdot}66 - 15{\cdot}36$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 0{\cdot}8y - 6{\cdot}7}$$

மாதிரி 2:

கீழ்வரும் பட்டியலிற் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரத்திற்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண் (April '59 B.A., Minor.)

மாணவர்கள்	:	1	2	3	4
மொழியில் மார்க்குகள்	:	40	20	20	40
புள்ளியியலில் மார்க்குகள்	:	20	60	0	80

முறை: 1.

x	y	xy	x^2	y^2
40	20	800	1,600	400
20	60	1,200	400	3,600
20	0	0	400	0
40	80	3,200	1,600	6,400
120	160	5,200	4,000	10,400

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \times 120 = 30$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4} \times 160 = 40.$$

$$\sigma x^2 = \frac{1}{4} \times 4000 - 900$$

$$= 1000 - 900$$

$$= 100. \quad i.e.\ \sigma x = 10.$$

$$\sigma y^2 = \frac{1}{4} . 10400 - 1600$$

$$= 2600 - 160.$$

$$= 1000. \quad i.e.\ \sigma y = 10\sqrt{10}.$$

$$\rho_{xy} = \frac{1}{4} \times 5200 - 1200 = 1300 - 1200 = 100.$$

$$r = \frac{100}{10 \times 10 \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3{\cdot}16}{10} = 0{\cdot}316.$$

முறை 2:

$$\bar{x} = 30; \quad \bar{y} = 40.$$

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
40	20	10	−20	− 200	100	400
20	60	−10	20	− 200	100	400
20	0	−10	−40	400	100	1,600
40	80	10	40	400	100	1,600
120	160	0	0	400	400	4,000

$$\sigma x^2 = \frac{1}{n}. \Sigma (x_r - \bar{x})^2 = \frac{1}{4}. 400 = 100.$$

$$\therefore \quad \sigma x = 10.$$

$$\sigma y^2 = \frac{1}{n}. \Sigma (y_r - \bar{y})^2 = \frac{1}{4}. 4000 = 1000.$$

$$\therefore \quad \sigma y = 10. \sqrt{10}.$$

$$\rho xy = \frac{1}{n}. \Sigma (x_r - \bar{x}) (y_r - \bar{y}) = \frac{1}{4}. 400 = 100.$$

$$r = \frac{\rho}{\sigma x . \sigma y}. \quad i.e. = \frac{100}{10 . 10 . \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. = 0{\cdot}316.$$

$\therefore$ $r = 0{\cdot}316$. இங்கு $r > 0$ ஆதலின், மொழிக்கும் (language), புள்ளியியலிற்கும் (statistics) நேர் உடன் தொடர்பு (positive correlation) இருக்கிறது. இருப்பினும், அது அவ்வளவு குறிப்பிடத்தக்க அளவிலில்லை (it is not so significant).

மாதிரி 3 :

சிதறல் விளக்கப்படம் (scatter diagram) என்றால் என்ன? கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் அட்டவணை, 10 மனிதர்களின் உயரத்தையும் (அங்குலத்தில்), எடையையும் (பவுண்டில்) காட்டுகிறது. சிதறல் விளக்கப்படம் வரைந்து உயரத்திற்கும் எடைக்கும், எவ்வித உடன் தொடர்பும், எந்த அளவுக்கு உடன் தொடர்பும் உள்ளன எனக் கண்டு பிடிக்கவும்.

மனிதர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
உயரம் (அங்குலத்தில்)	68	69	65	70	71	73	67	66	62	69
எடை (பவுண்டில்)	140	180	165	190	170	195	145	140	155	180

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma(x_r - a)}{n}. \qquad \bar{y} = b + \frac{\Sigma(y_r - b)}{n}$$

$$= 69 + \frac{-10}{10}. \qquad = 165 + \frac{10}{10}.$$

$$= 69 - 1 = 68. \qquad = 166.$$

$$\therefore \boxed{\bar{x} = 68} \qquad \therefore \boxed{\bar{y} = 166}$$

x_r	y_r	$x_r - 69$	$y_r - 165$	$(x_r - 69)(y_r - 165)$	$(x_r - 69)^2$	$(y_r - 165)^2$
68	140	—1	—25	25	1	625
69	180	0	15	0	0	225
65	165	—4	0	0	16	0
70	190	1	25	25	1	625
71	170	2	5	10	4	25
73	195	4	30	120	16	900
67	145	—2	—20	40	4	400
66	140	—3	—25	75	9	625
62	155	—7	—10	70	49	100
69	180	0	15	0	0	225
மொத்தம்		—17+7=—10	—80+90=10	365	100	3,750

$$\sigma x^2 = \frac{1}{n}.\Sigma(x_r - a)^2 - (\bar{x} - a)^2. \quad \sigma y^2 = \frac{1}{n}.\Sigma(y_r - b)^2 - (\bar{y} - b)^2$$

$$= \frac{1}{10} \times 100 - 1 \qquad = \frac{1}{10} \times 3750 - 1$$

$$= 9. \qquad = 375 - 1 = 374.$$

$\sigma x = 3$	$\sigma y = 19{\cdot}34$

$$\rho xy = \frac{1}{n}.\Sigma(x_r - a)(y_r - b) - (\bar{x} - a)(\bar{y} - b)$$

$$= \frac{1}{10}.\ 365 - (-1)(+1)$$

$$= 36{\cdot}5 + 1$$

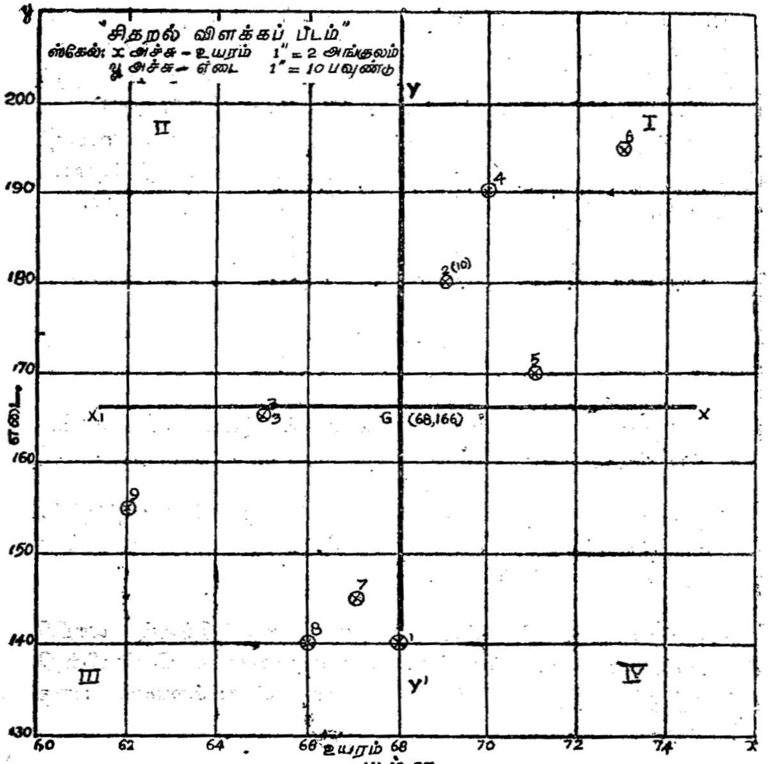
$$= 37{\cdot}5.$$

$$r = \frac{\rho xy}{\sigma x \cdot \sigma y} = \frac{37{\cdot}5}{3 \times 19{\cdot}34} = \frac{37{\cdot}5}{58{\cdot}02} = \frac{37{\cdot}5}{58}. = 0{\cdot}646.$$

$$\therefore \quad \boxed{r = 0{\cdot}646}$$

கணக்கியல் மூலம் மனிதர்களின் உயரத்திற்கும், எடைக்கும் நேர் உடன் தொடர்பு இருக்கின்றதென்றும், தொடர்பு மிக அதிக அளவிலும் காணப்படுகிறதென்றும் அறிகிறோம்.

சிதறல் விளக்கப் படத்தில் x-அச்சில் உயரங்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைத் தகுந்த ஸ்கேல்எடுத்துக் குறிக்கவும். y-அச்சில் பளுவைத் தகுந்த ஸ்கேல் எடுத்துப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். கொடுத்திருக்கும் 10 ஜதைகளில் வரும் முதல் எண்களைக் கிடை அச்சுத் தூரங்களாகவும், இரண்டாவதாக வரும் எண்களை நிலை அச்சுத் தூரங்களாகவும் கொண்ட புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கவும்.



படம்-27

10 மனிதர்களின் சராசரி உயரம் =68″

எடையின் சராசரி =166 பவு.

(68, 166) ஜோடி எண்களை G என்னும் புள்ளியால் வரைபடத்தில் குறித்து, X^1GX, Y^1GY என்ற கோடுகளை முறையே x அச்சுக்கும், y அச்சுக்கும் இணையாக வரையவும்; இப் புதிய அச்சுகள் வரைபடத்தானை 4 பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.

சிதறல் வரைபடத்திலுள்ள புள்ளிகளின் போக்கைக் கவனிக்கவும். (1) புள்ளிகள் 1, 3 ஆவது பகுதிகளில் வருவதால், மனிதர்களின் உயரத்திற்கும், பளுவுக்கும் 'நேர் உடன் தொடர்பு' உண்டு என்று அறிகிறோம்.

(2) 1ஆவது பகுதியில் உள்ள புள்ளிகள் மேல்நோக்கிச் செல்பவைகளாகவும், 3ஆவது பகுதியில் உள்ள புள்ளிகள் ஏறக்குறைய கீழ்நோக்கிச் செல்பவைகளாகவும், மொத்தத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளும் கீழ் இடது கோடியிலிருந்து மேல் வலது கோடிக்கு வரையும் ஒரு நேர்க்கோட்டின் போக்கைப் பெற்றுள்ளன. ஆதலால், உயரத்திற்கும், பளுவுக்கும் உள்ள 'உடன் தொடர்பு' நேரிடைத் தொடர்பாகவும், அதிக அளவு தொடர்பைப் பெற்றதாகவும் அறிகிறோம்.

கணக்கியல்படி,
$r = 0{\cdot}646$

உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பயன்கள் (Uses of Correlation Coefficient)

(*a*) பொருளாதாரத் துறைகளில், பொருளின் உற்பத்தி, அதற்கு ஏற்படும் செலவு, அதன் விலைவாசி, இவைகளுக்குள்ள தொடர்பை விளக்கம் செய்கிறது.

(*b*) சமூக அறிவியலில், ஏழ்மைத் தனத்திற்கும் லாகிரி வஸ்துக்களை உபயோகிப்பதற்குமுள்ள உறவையும், வேலையின்றி யிருப்பதற்கும் குற்றம் செய்வதற்குமுள்ள தொடர்பையும் பாகுபடுத்த உதவுகிறது.

(*c*) உளவியலில் (Psychology), சிறிய மாணவர்களின் வயதிற்கும், அவர்களின் படிப்பின் திறனுக்கும் உள்ள ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை விளக்குகிறது.

உடன் தொடர்புக் கெழுவின் பொருள் விளக்கம் (Meaning of the term Correlation Coefficient): இரண்டு மாறிகளுக்கு ஒரு நேர்கோட்டுச் சம்பந்தமான தொடர்பு இருக்குமானால்தான் உடன் தொடர்புக் கெழு, அவைகளுக்குள்ள உறவை வெளிப்படுத்துகிறது.

ஒரு சமயத்தில், இரு மாறிகளுக்குள்ள தொடர்பு 0·8 என்றும், அதே இரு மாறிகளுக்குள்ள தொடர்பு, பிறிதொரு சமயத்தில் 0·4 என்றும் வருமானால், நாம் உடனேயே அவ்விரு மாறிகளுக்குள்ள தொடர்பு, முன்பிருந்ததைவிட, பிறிதொரு சமயத்தில் சரிபாதியாகி விட்டதென்று சொல்ல முடியாது.

தற்செயலான தொடர்புக்கும் காரணத் தொடர்புக்கும் உள்ள வேறுபாட்டை நினைவுறுத்தல் வேண்டும். ஏனெனில், உளவியலில், மனத்திலேயே படித்துப் புரிந்துகொள்வதற்கும் (silent reading), கணக்குகளில் விடை கண்டுபிடிப்பதற்கும் (solving mathematical problems) 'பூரண நேர் உடன் தொடர்பு' (direct or positive correlation) உண்டு எனக் கண்டிருக்கிறார்கள். ஆதலால், நாம் உடனேயே கணக்கில் விடை கண்டுபிடிப்பது, மனத்திலேயே படிப்பதைச் சார்ந்திருக்கிறது என்று காரணத் தொடர்பாகக் கருத முடியாது.

இரண்டு மாறிகளுக்குள்ள தொடர்புக் கெழுவால் எது காரணமாகவுள்ளது, எது விளைவு எனக் கூற முடியாது.

உடன் தொடர்பு, இரண்டு மாறிகளுக்குக் காரண விளைவின்றி, ஏதாவது ஒன்று அல்லது பல காரணங்களால் ஏற்படலாம்.

காரண விளைவிற்கு எதிராக அமைந்தும், இரண்டு மாறிகள் தொடர்பைப் பெறலாம். ஏனெனில், கல்லூரியில் படிக்கும் மாணவர்களின் தரவரிசை அமைப்பிற்கும் (grade status). அவர்கள் படிப்பதற்கு எடுத்துக்கொண்ட கால அளவிற்கும் மாறான உடன் தொடர்பு (inverse or negative correlation) இருக்கிறது என்று கண்டிருக்கிறார்கள். ஆகவே, நாம் மாணவர்களிடம், அதிக நேரம் படித்தால் குறைந்த தர வரிசையைத்தான் பெறமுடியும் என வற்புறுத்த முடியாது. ஏனெனில், இத் தொடர்பில் புத்திசாலித்தனம் (intelligence) மூன்றாவது காரணமாக இருக்கிறது. தவிரவும், புத்தி கூர்மைக்கும் தர வரிசைக்கும் நேர் உடன் தொடர்பும், புத்தி கூர்மைக்கும் படிப்பதற்கு எடுத்துக்கொண்ட கால அளவிற்கும் மாறான தொடர்புமுண்டு என்று மனத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

ஆதலால் உடன் தொடர்புக் கெழுவைப் பகுத்தறிவு, அனுபவம் இவைகளை யொட்டியமைத்து, ஏற்றவாறு உபயோகிக்கவேண்டும்.

தொடர்புக் கோடுகளின் பயன்கள்

y மாறியை, x மாறியின் வாயிலாக மதிப்பிடும் ரெக்ரெஷன் கோட்டை,

(1) $y - \bar{y} = \frac{\rho}{\sigma x^2} (x - \bar{x})$ என்ற சமன்பாடும்,

x மாறியை, y மாறியின் வாயிலாக மதிப்பிடும் ரெக்ரெஷன் கோட்டை

(2) $x - \bar{x} = \frac{\rho}{\sigma y^2} (y - \bar{y})$ என்ற சமன்பாடும்

அறிவிக்கின்றன.

x-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அதற்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்பை (1) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியும், அவ்விதமே y-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அதற்கு ஏற்ற x-ன் மதிப்பை (2) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியும் அறிந்துகொள்ளலாம். ஆனால், இதில் கிடைக்கக்கூடிய மதிப்புகள் தோராயமானவைகளே. இவ்வாறு, தோராயமாக மதிப்பீடு செய்வதில் தொடர்புக் கோடுகள் பயன்படுகின்றன.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளுக்கு இடையில், அல்லது மிக அருகில் வரும் x மதிப்புக்கேற்ற y மதிப்பையும், y மதிப்புக்கேற்ற x மதிப்பையும்தான் அறியவேண்டுமேயன்றி, கொடுத்த செய்திகளுக்கு அப்பாற்பட்ட x அல்லது y மாறியின் மதிப்பைக்கொண்டு, y அல்லது x மாறியின் மதிப்பைக் காணுதல் முறையாகாது.

ரெக்ரெஷன் கோடுகளை வரையும் விதம்

x, y மாறிகள் முறையே தந்தை, மகன் ஆகியோரின் உயரங்களைக் குறிக்கட்டும். x-ல் y-ன் தொடர்புக் கோட்டை,

(1) $y = 0{\cdot}84\,x + 10{\cdot}8$ என்ற சமன்பாடும், y-ல் x-ன் தொடர்புக் கோட்டை,

(2) $x = 0{\cdot}91\,y + 5$ என்ற சமன்பாடும் தெரிவிப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, தந்தையின் உயரத்தை முறையே 60″ 68″ எனக் கொண்டு 1ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, மகனுக்குரிய உயரம்,

$y = 0{\cdot}84 \times 60 + 10{\cdot}8 = 61{\cdot}2''$ என்றும்,

$y = 0{\cdot}84 \times 68 + 10{\cdot}8 = 67{\cdot}92''$ என்றும்

மதிப்பிடப்படுகிறது.

ஒரு நேர்க்கோட்டை வரைவதற்கு இரு புள்ளிகள் தேவை. எனவே, தந்தைக்குரிய உயரத்தைக் கிடை அச்சிலும், மகனுக்குரிய உயரத்தை நிலை அச்சிலும் குறிக்கவும். பிறகு (60, 61·2), (68, 67·92) என்ற மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளை, வரைபடத்தாளில் குறித்துச் சேர்க்க உண்டாகும் கோடு x-ல் y-ன் தொடர்புக் கோடாகும்.

அவ்வாறே, பிள்ளைகளின் உயரங்களை 60″, 70″ எனக் கொண்டால், (2)ஆவது சமன்பாட்டின் மூலம் அவர்களது தந்தைகளின் உயரங்கள்,

$x = 0{\cdot}91 \times 60 + 5 = 59{\cdot}6''$ என்றும்,

$x = 0{\cdot}91 \times 70 + 5 = 68{\cdot}7''$ என்றும்

மதிப்பிடலாம்.

மதிப்புத்தரத் தொடர்புக் கெழு (Rank Correlation Coefficient)

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளை அப்படியே கொடுக்காமல், அவற்றின் மதிப்பிடங்கள் மட்டும் அறிவிக்கப்பட்டிருந்தபோதிலும், உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காணமுடியும். இக்கெழுவை 'மதிப்புத்தரத் தொடர்புக் கெழு' எனக் கூறுகிறோம். இங்கும் இரு மாறிகளின் வரிசைத்தரங்கள் ஒரு நேர் கோட்டுச் சம்பந்தமான தொடர்பைப் பெற்றுள்ளன என்பதை மேற்கொண்டுதான் தொடர்புக் கெழு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

வரிசையாக ஒவ்வொரு உறுப்பின் இரு மதிப்பிடங்களையும் கண்டு, அவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைப்பைப் பெற்றதாகக் கொள்வோம்.

x :	1	2	3	4	...	...	...	...	n
y :	5	9	8	2	...	...	n	...	12

இவ்விரு மதிப்பிடங்களுக்குமிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைக் காணவும். பிறகு ஒவ்வொரு வேறுபாட்டின் வர்க்கத்தைக் கண்டு அவைகளனைத்தையும் கூட்டவும்.

மதிப்புத்தரத் தொடர்புக் கெழுவை வரையறுக்கும் சூத்திரம்: $\rho = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$. இங்கு ρ (ரோ) என்ற கிரேக்க எழுத்து, மதிப்புத்தரத் தொடர்புக் கெழுவை அறிவிக்கும்.

d = மதிப்பிடங்களுக்குள்ள வேறுபாடு.

n = மதிப்பிடங்களின் (உறுப்புகளின்) எண்ணிக்கை.

ஒவ்வொரு உறுப்பின் இரு மதிப்பிடங்களும் ஒரே மாதிரியாக வருமானால், மதிப்பிடங்களுக்குள்ள வேறுபாடுகள் ஒவ்வொன்றும் 0-ஆகும். எனவே, ρ-ன் மதிப்பு ஒன்று ஆகும். மதிப்பிடங்களின் அமைப்பு நேர்மாறாக இருந்தால் (ஒன்றில் மதிப்பிடங்கள் ஏறு வரிசையிலும், மற்றொன்றில் இறங்கு வரிசையிலும் வருமானால்) ρ-ன் மதிப்பு -1 ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

10 மாணவர்கள் கணக்கிலும் பௌதிகத்திலும் பெற்ற மதிப்பிடங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மதிப்பிடங்களுக்குரிய தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு, அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை விளக்குக.

மாணவரது வரிசை எண் :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
கணிதத்தில் மதிப்பிடம் :	3	8	5	2	1	9	6	10	4	7
பௌதிகத்தில் மதிப்பிடம் :	1	7	6	3	2	8	4	9	5	10
d = வேறுபாடு :	2	1	−1	−1	−1	1	2	1	−1	−3
d^2 :	4	1	1	1	1	1	4	1	1	9

$$\Sigma d^2 = 24$$

$$n = 10$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 24}{10 \times 99} = 1 - \frac{24}{165}$$

$$= \cdot 85$$

இங்கு ρ-ன் மதிப்பு அதிகமாக வருவதால், மதிப்பிடங்கள் குறிப்பிடத்தக்க அளவு நேரிடைத் தொடர்பைப் பெற்றுள்ளன எனக் கூறலாம்.

சில சமயங்களில், இரு மாணவர்கள் ஒரே மதிப்பிடங்களைப் பெறலாம். அப்போது, அவர்கள் பெற்ற மதிப்பிடம், அதற்கு அடுத்து வரும் மதிப்பிடம் இவற்றின் கூட்டுச் சராசரியையே அவர்களின் மதிப்பிடங்களாகக் கொள்ளவேண்டும். இதற்கு எடுத்துக்காட்டாக, இரு மாணவர்களின் மதிப்பிடங்கள் 8 என இருக்குமானால், அவர்களுக்குரிய இரு மதிப்பிடங்களையும் $8\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$ என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு

10 மாணவர்கள் இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளை மதிப்பிடங்களாக மாற்றியமைத்து, அவைகளுக்குள்ள தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

x	x-ன் மதிப்பிடம்	y	y-ன் மதிப்பிடம்	d x, y மதிப்பிடங்களுக்குரிய வேறுபாடுகள்	d^2 (வேறுபாடு)^2
75	3	40	5·5	—2·5	6·25
45	5	40	5·5	—0·5	0·25
60	4	90	1·0	3·0	9·00
16	10	10	9·0	1·0	1·00
25	8·5	50	4·0	4·5	20·25
25	8·5	0	10·0	—2·5	6·25
90	1·0	75	2·0	—1·0	1·00
35	6·0	25	7·0	—1·0	1·00
28	7·0	12	8·0	—1·0	1·00
85	2·0	70	3·0	—1·0	1·00
மொத்தம்	...	...	...	...	47·00

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times 47}{10 \times \underset{33}{\cancel{99}}}$$

$$= 1 - \frac{94}{330}$$

$$= \frac{236}{330}$$

$$= 0{\cdot}715$$

பயிற்சி

1. உடன் தொடர்பு என்றால் என்ன ?

2. நேர்க்கோட்டுச் சம்பந்தமுள்ள இரு மாறிகளின் தொடர்பைச் சிதறல் விளக்கப்படம் மூலம் விளக்கிடுக.

3. ரெக்ரெஷன் (Regression), ரெக்ரெஷன் கோடுகள் (Regression lines) என்றால் என்ன? கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களுக்கு இரு ரெக்ரெஷன் கோடுகள் இருப்பதன் காரணம் என்ன? புள்ளியியலில் இக்கோடுகள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன ?

4. ரெக்ரெஷன் கெழுக்கள் என்றால் என்ன ? இவைகளுக்கும், உடன் தொடர்புக் கெழுவுக்குமுள்ள வேற்றுமையை விளக்குக.

5. நேரிடைத் தொடர்பு, எதிரிடைத் தொடர்பு, போலித் தொடர்பு இவற்றினை எடுத்துகாட்டுகளுடன் விளக்குக.

6. x, y மாறிகளின் மதிப்புகள் பின்வருமாறு :

x:	5	4	3	2	1
y:	1	2	3	4	5

பார்த்தவுடனேயே x, y மாறிகளுக்குள்ள தொடர்பை ஊகித்தறிய முடியுமா ? இவைகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக. (விடை: $r = -1$)

7. கீழ்க்காணும் விவரத்திற்குத் தொடர்புக் கெழு காண்க:

x:	8	6	4	7	5
y:	9	8	5	6	2

(விடை: $r = 0{\cdot}7$)

8. x, y என்பன முறையே கணவன், மனைவி ஆகியோரின் வயதைக் குறிக்கின்றன. இவர்களின் வயதுக்குள்ள தொடர்பைச் சிதறல் விளக்கப்படம் மூலம் விளக்கிடுக.

x:	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
y:	18	20	22	27	24	29	27	29	28	29

x, y மாறிகளுக்குள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க.
(விடை : $r=0{\cdot}84$)

9. கீழ்வரும் பட்டியலில் x, y மாறிகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளுக்குள்ள தொடர்பைச் சிதறல் விளக்கப் படம் மூலம் விளக்கிடுக.

x:	23	26	28	30	30	32	34	36	40	41	43	45
y:	134	136	140	129	135	129	125	128	127	123	118	120

x, y மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவையும், ரெக்ரெஷன் கோடுகளையும் காண்க.

10. 20 மாணவர்கள், கணக்கிலும் பௌதிகத்திலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

கணக்கில் மதிப்பெண்கள்	(x):	55	70	62	33	45	55	60	88	42	45
பௌதிகத்தில் மதிப்பெண்கள்	(y):	59	73	48	49	58	55	56	78	31	59
	(x):	87	72	17	53	52	47	70	32	70	52
	(y):	89	77	26	42	60	38	55	34	68	50

சிதறல் விளக்கப்படம் வரைந்து, கணக்கு, பௌதிகம் இவைகளுக்குள்ள தொடர்பைப் பொதுவாக விளக்கிடுக.

11. 9 தந்தைகள், 9 பிள்ளைகள் இவர்களின் உயரங்களை அளந்து கணக்கிட்டதில் பின்வரும் விவரங்கள் கிடைத்தன. (இங்கு x, y என்பன முறையே தந்தை, பிள்ளை ஆகியோரின் உயரத்தைக் குறிக்கின்றன.)

$\bar{x}=68{\cdot}66''$ $\quad\sigma x^2=62$

$\bar{y}=68{\cdot}66''$ $\quad\sigma y^2=\frac{14}{3}$ $\quad r=0{\cdot}49$

y-ன் தொடர்புக் கோட்டினை x-இலும்,
x-ன் ,, ,, y-இலும் கணக்கிடுக.

தந்தை உயரம் 70 அங்குலம் என்றால், பிள்ளையின் உயரத்தை மதிப்பிடுக. (விடை : $69{\cdot}46''$)

12. x-ல், y-ன் தொடர்புக் கோட்டினை, பின்வரும் செய்திகளிலிருந்து வரையறுத்திடுக :

x-ன் கூட்டுச் சராசரி$=12{\cdot}5$; x-ன் திட்ட விலக்கம்$=6{\cdot}1$

y-ன் கூட்டுச் சராசரி$=3{\cdot}7$; y-ன் திட்ட விலக்கம்$=2{\cdot}79$

உடன் தொடர்புக் கெழு$=-0{\cdot}4$.

$x=18$ என்றால், y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

13. x, y மாறிகளை அளவிட்டதில் பின்வரும் விவரங்கள் கிடைத்தன :

$\Sigma x = 150$; $\Sigma y = 70$ $\Sigma xy = 1052{\cdot}25$

$\Sigma x^2 = 2272{\cdot}5$; $\Sigma y^2 = 493{\cdot}6$ $n = 10$

$\bar{x}, \bar{y}, \sigma x, \sigma y, \rho xy, r$ - இவைகளைக் கணக்கிடுக.

(விடை $\bar{x} = 15$; $\bar{y} = 7$; $\sigma x = 1{\cdot}5$; $\sigma y = 0{\cdot}6$, $\rho xy = 0{\cdot}225$; $r = 0{\cdot}25$)

14. 13ஆவது கேள்வியில் வரும் விடைகளைக்கொண்டு x-ல், y-ன் தொடர்புக் கோட்டினையும் ; y-ல், x-ன் தொடர்புக் கோட்டினையும் வரையறுத்திடுக.

(விடை: $y = 0{\cdot}1x + 5{\cdot}5$; $x = 0{\cdot}625y + 10{\cdot}625$)

15. ரெக்ரெஷன் கோடுகளைப் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடுக :

$\bar{x} = 125$, $\bar{y} = 80$, $\sigma x = 15$, $\sigma y = 9$; $r = {\cdot}55$

(விடை: $y = 0{\cdot}33x + 38{\cdot}75$; $x = 0{\cdot}916y + 100{\cdot}56$)

16. $\Sigma x = 30$ $\Sigma x^2 = 190$ $\Sigma xy = 192$

$\Sigma y = 30$ $\Sigma y^2 = 210$ $n = 5$.

$\bar{x}, \bar{y}, \sigma x, \sigma y, \rho xy, r$ - ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

ரெக்ரெஷன் கோடுகளை வரையறுத்திடுக.

(விடை: $\bar{x} = 6$; $\bar{y} = 6$; $\sigma x = \sqrt{2}$, $\sigma y = \sqrt{6}$,
$pxy = 2{\cdot}4$, $r = {\cdot}6928$
$y = 1{\cdot}2x - 1{\cdot}2$; $x = 0{\cdot}4y + 3{\cdot}6$

17. $\Sigma x = 436 \quad \Sigma x^2 = 24,640 \quad \Sigma xy = 26,796$

$\Sigma y = 476 \quad \Sigma y^2 = 29,184 \quad n = 8$

$\bar{x}, \bar{y}, \sigma x, \sigma y, pxy, r$ இவற்றைக் கணக்கிடுக.

(விடை: $\bar{x} = 54{\cdot}5$; $\bar{y} = 59{\cdot}5$; $\sigma x^2 = 109{\cdot}75$; $\sigma y^2 = 207{\cdot}75$, $\rho xy = 106{\cdot}75$)

18. $r = 0$, $r = 1$, $r = -1$ என வரும்போது, ரெக்ரெஷன் கோடுகளின் அமைப்பினை விளக்கிடுக.

19. பின்வரும் அறிக்கைகளை மதிப்பிடுக.

(a) உடன் தொடர்புக் கெழு 0-க்குக் கீழ் மதிப்பினைப் பெற்ற இருமாறிகள் 'ஒரு நேர் கோட்டு சம்பந்தமின்மை' (absence of linear relationship)-ஐத் தெரிவிக்கிறது.

(b) $r = 0{\cdot}8$ ஆக உள்ள இரு மாறிகளின் தொடர்பு $r = 0{\cdot}4$ ஆக உள்ள மற்ற இரு மாறிகளின் தொடர்பின் இரு மடங்காகும்.

(c) இரு மாறிகளுக்குள்ள தொடர்புக் கெழு 0 ஆனால், அவைகளிரண்டும் சார்பிலா (independent) மாறிகளே.

(d) உடன் தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பு அதிகரித்திருப்பது இரு மாறிகளுக்குள்ள காரணத் தொடர்பைத் (causal relationship) தெரிவிக்கிறது.

20. 10 மாணவர்கள், ஆங்கிலத்திலும் கணிதத்திலும் பெற்ற மதிப்பிடங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மதிப்பிடங்களுக்குரிய தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க :

ஆங்கிலத்தில் மதிப்பிடம் :	1	6	5	10	4	9	7	8	2	3
கணிதத்தில் மதிப்பிடம் :	6	4	9	8	3	10	5	7	2	1

[விடை : $\rho = {\cdot}63$]

21. பின்வரும் மதிப்பிடங்களுக்குரிய தொடர்புக் கெழுவைக் கண்டுபிடி :

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y :	3	2	4·5	4·5	8	7	1	10	6	9

[விடை $\rho = {\cdot}6$]

22. ஒரு சொற்பொழிவுப் போட்டியில் 10 மாணவர்கள் கலந்துகொண்டனர். இரு நடுநிலைமையாளர்கள் அவர்களுக்குக் கொடுத்த மதிப்பிடங்கள் பின்வருமாறு :

மாணவரது வரிசை எண்	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
முதல் நடுநிலைமையாளர் கொடுத்த மதிப்பிடங்கள்.	:	2	1	3	4	6	5	8	7	10	9
இரண்டாவது நடுநிலைமையாளர் கொடுத்த மதிப்பிடங்கள்.	:	3	2	1	4	6	7	5	9	10	8

நடுநிலைமையாளர்கள் கொடுத்த மதிப்பிடங்களுக்குள்ள உறவைக் காண்க.

9. பண்புகளின் கூட்டுறவு

சாந்தம், தயை, கொடுமை, அன்பு, வறுமை என்பன பண்புகளாகும். இவைகளை அளந்து கூறமுடியாது. ஆனால் இப் பண்புகளைப் பொதுவாகத் தரப்படுத்திக் கூறமுடியும். அதாவது, ஒருவனிடம் இப் பண்புகள் உள்ளதா, இல்லையா என்று தரம் பிரித்துக் கூற முடியுமேயன்றி அளவிட முடியாது. ஆனால், ஒருவரின் உயரம், எடை, தலையின் சுற்றளவு முதலியவைகளை அளவுகோல்களின் மூலம் மிகத் துல்யமாக அளவிட முடியும். இங்ஙனம் அளவில் மாறும் இயல் புள்ளவைகளே மாறிகள் எனப்படும்.

புள்ளி விவரங்களை அளவுக்குகந்தவாறும் பண்புகளுக்குகந்தவாறும் பிரிக்கமுடியும்.

கூட்டுறவு: ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பை எடுத்துக்கொண்டு, ஒரு தொகுதியை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒரு பிரிவினர் அப் பண்பை உடையவராகவும், மற்றொரு பிரிவினர் அப் பண்பற்றவர்களாகவும் இருப்பர். உதாரணமாக, ஒரு கல்லூரியில் படிக்கும் மாணவர்களைப் புகை பிடிப்போர், புகை பிடிக்காதோர் என இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். இப்பண்பைத் தவிர, மாணவர்களை விடுதியில் தங்கிப் படிப்பவர் என்றும் வீட்டிலிருந்து வந்து படிப்பவர் என்றும் பிரிக்கலாம். மேற்கூறிய இரு பண்புகளுக்கும் கூட்டுறவு உண்டா என்பதை அறிவதே நமது நோக்கம். இதனைக் கீழ்க் கண்ட பட்டியல் மூலமறியலாம்.

முதலாவதாக, விடுதியில், வீட்டில் வசிப்போர் எனப் பிரித்து அவற்றுள் புகை பிடிப்பவரின் விகிதத்தைக் கணக்கிடுவோம். கீழ் அமைக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் விடுதியில், வீட்டில் தங்குபவர்களின் விகிதம் 1 : 4 ஆகவுள்ளது. புகை பிடிப்பவர்களிலும் இவ் விகிதமே காணப்பட்டால், விடுதியில் தங்குவதும், புகைபிடிப்பதும் உறவற்றன என்று கொள்ளலாம்.

இருப்பிடத்தின் வகை	புகை பிடிப்பவர்	புகை பிடியா தோர்	மொத்தம்.
விடுதியில் தங்கிப் படிப்போர்	80	20	100
வீட்டிலிருந்து வருவோர்	160	240	400
மொத்தம்.......	240	260	500

ஆனால், இங்குப் புகை பிடிப்பவர்களின் விகிதம், வீட்டிலிருந்து வருபவர்களைவிட விடுதியிலிருப்பவர்களிடமே அதிகமாகவுள்ளது.

$$\frac{80}{100} : \frac{160}{400} = 2:1.$$

ஆதலால், விடுதியில் தங்குவதும், புகைபிடிப்பதும் கூட்டுறவைப் பெற்றுள்ளன. எனவே, இவ்விரண்டிற்கும் நேரிடைக் கூட்டுறவு (positive association) உண்டு எனக் கூறலாம்.

ஏனெனில்,

மொத்தத்தில் விடுதியில் தங்குவோரின் விகிதம் $= \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

மொத்தம் புகைபிடிப்போர் $= 240$

∴ இயல்பாக விடுதியில் தங்குவோரில் புகை பிடிப்பவர்கள் $= \frac{1}{5} \times 240 = 48$

ஆனால் பட்டியலில், விடுதியில் தங்குவோரில் புகை பிடிப்பவர்களின் எண்ணிக்கை 80 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வெண்ணிக்கை இயல்பாக இருக்கவேண்டியதைவிட, அதிகப்படுவதால் இவ்விரு பண்புகளும் கூட்டுறவு உடையன எனக் கொள்கிறோம்.

விடுதியில் தங்குவதற்கும், புகை பிடிப்பதற்கும் நேரிடைக் கூட்டுறவு உண்டெனக் கொண்டால், வீட்டில் தங்குவதும் புகை பிடிப்பதும் எதிரிடைக் கூட்டுறவுடையன (negative association) என்று கொள்ளலாம்.

இரண்டாவதாக, புகை பிடிப்பவர், புகை பிடிக்காதவர் எனப் பிரித்துக்கொண்டு, அவருள் விடுதியில் வசிப்பவரின் விகிதத்தைக் கணக்கிடலாம். அப்போது விடுதியில் வசிப்பதற்கும், புகை பிடிப்பதற்கும் உறவு உண்டா எனக் காண முடியும்.

விடுதியில் தங்கிப் புகை பிடிப்போரின் விகிதம் $\left.\right\} = \frac{80}{240} \times 100$ (3)

$= 33\frac{1}{3}\%$

விடுதியில் தங்கிப் புகை பிடியாதோரின் விகிதம் $\left.\right\} = \frac{20}{260} \times 100$ (13)

$= 7.69\%$

இவ்விரு விகிதங்களும் ஒன்ருக வருமாஞல், விடுதியில் தங்குவதும், புகை பிடிப்பதும் உறவற்றன எனக் கருதவேண்டும். ஆனல், மேற்கண்ட விகிதங்கள் விடுதியில் தங்குவதற்கும், புகை பிடிப்பதற்கும் கூட்டுறவு உண்டென அறிவிக்கின்றன.

மூன்ரும் முறையாக,

புகை பிடிப்பவர்களில் வீட்டில் தங்குபவர்கள் $\left.\right\} = 160$

புகை பிடிப்பவர்களில் விடுதியில் தங்குபவர்கள் $\left.\right\} = 80$

∴ புகை பிடிப்பவர்களில் வீட்டில், விடுதியில் தங்குபவர்கள் விகிதம் $\left.\right\} = 160 : 80$

$= 2 : 1 = \frac{2}{1} \times 100$

$= 200\ \%$

புகை பிடிக்காதவர்களில் இவர்களின் விகிதம் $\left.\right\} = 240 : 20$

$= 12 : 1 = \frac{12}{1} \times 100$

$= 1200\ \%$

இவ்விரு விகிதங்களும் ஒன்ருக இருந்திருக்குமாஞல், இவ்விரு பண்புகளும் உறவற்றனவாகக் கருதப்படும். இங்கு 2ஆவது விகிதமே பெரியது. ஆதலால் புகை பிடிப்பதும், வீட்டில் தங்குவதும்

கூட்டுறவுடையனவாகும் ; அல்லது புகை பிடிப்பதும் விடுதியில் தங்குவதும் கூட்டுறவுடையன என்றும் கூறலாம்.

பல பண்புகளைக் கொண்டுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியை ஆராயும்பொழுது, ஒவ்வொரு பண்பையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியை அவ்வப்போது இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

குறியீடு : பண்புகளை ஆராயும்பொழுது, அவை ஒவ்வொன்றையும் A, B, C......என்று ஆங்கில எழுத்தில் குறிப்பது வழக்கம். இப் பண்புகளுக்கு நேர்மாறான பண்புகளை, α, β, γ ....என்ற கிரேக்க எழுத்துகளால் குறிப்பது வழக்கம். உதாரணமாக A என்பது புகைபிடிப்பதைக் குறித்தால், α என்பது புகை பிடிக்காமையைக் குறிக்கும்; அங்ஙனமே, B என்பது விடுதியில் வசிப்பதைக் குறித்தால், β என்பது வீட்டில் வசிப்பதைக் குறிக்கும்; A பண்பு பெற்றவரை (A) எனக் குறிப்பது வழக்கம். பண்புகளின் கூட்டுறவை அப் பண்புகளுக்குகந்த எழுத்துகளைச் சேர்த்தமைத்துக் குறிப்பிடுகிறோம். ஆகவே AB என்பது, A பண்பும், B பண்பும் சேர்ந்து வருவதைக் குறிக்கும். (AB) என்பது A, B ஆகிய இரு பண்புகளும் உடையவரைக் குறிக்கும். (A), (AB) என்பவை எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதால், அவைகள் அலைவெண்கள் என்று கருதப்படும்.

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை, N எனக் குறிக்கப்படும். (A), (α), (B), (β) என்பவை 1ஆம் படி அலைவெண்கள் எனவும், (AB), (Aβ), (αB), ($\alpha\beta$) என்பவை 2ஆம் படி அலைவெண்கள் எனவும், N என்பது, 0-படி அலைவெண் எனவும் குறிப்பது வழக்கம். இவ்வாறே (ABC) என்பது 3ஆவது அலைவெண் படியாகக் கூறப்படும். ஆக அடைப்புக் குறிக்குள் வரும் எழுத்துகளின் எண்ணிக்கையே, அவ்வெண்களின் படியைக் (order) கூற உதவுகிறது.

பண்பு அலைவெண்களின் அமைப்பு முறை

முழுமைத் தொகுதியின் மொத்த எண்ணிக்கை = N

தொகுதியில் A பண்புடைய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை } = (A)

தொகுதியில் A பண்பில்லாத உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை } = (α)

$$\therefore \quad (A) + (\alpha) = N.$$

[தொகுதியில் வரும் ஒவ்வொரு உறுப்பும் A - பண்பையாவது, α (A - பண்பின்மை) பண்பையாவது பெற்றுத்தான் ஆக வேண்டும். ஏனெனில் A, α - பண்புகள் ஒன்றுக்கொன்று நேரிடையான பண்புகள்.]

இம்மாதிரியே,

$$(B) + (\beta) = N$$

$$(C) + (\gamma) = N.$$

பொருத்தமான இருமுதற்படி அலைவெண்களின் கூடுதலே மொத்தமாகும்.

(AB)—A-பண்பையுடையனவற்றில், B-பண்பைப் பெற்றவைகளின் எண்ணிக்கை.

$(A\beta)$ = A-பண்பையுடையனவற்றில் β (B-பண்பின்மை) பண்பைப் பெற்றவைகளின் எண்ணிக்கை.

$$\therefore (AB) + (A\beta) = (A)$$

இதேபோல் $(\alpha B) + (\alpha\beta) = (\alpha)$

இவ்விரண்டையும் கூட்டினல்,

$(AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta) = (A) + (\alpha) = N$ என்றாகும்.

இவை நான்கும் 2-ம் படி அலைவெண்களாகும்.

$$(ABC) + (AB\gamma) = (AB)$$

$$(\alpha BC) + (\alpha B\gamma) = (\alpha B)$$

$$(A\beta C) + (A\beta\gamma) = (A\beta)$$

$$(\alpha\beta C) + (\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta).$$

$$\left.\begin{aligned}&(ABC)+(AB\gamma)+(\alpha BC)+(\alpha B\gamma)+\\&(A\beta C)+(A\beta\gamma)+(\alpha\beta C)+(\alpha\beta\gamma)\end{aligned}\right\} = (AB)+(\alpha B)+ A\beta + (\alpha\beta). = N$$

பண்புகளின் அறிகுறிச் சமன்பாடுகள் (Symbol Equivalence of Attributes)

ஒரு தொகுதியிலுள்ள N உறுப்புகள் அனைத்தும் A-பண்பைப் பெற்றிருந்தால் (A)=N ஆகும்.

A-பண்பற்றவைகளானல், $(\alpha) \equiv 0$.

அதாவது, A-பண்பற்ற உறுப்பு ஒன்றுமில்லை என்று குறிக்கிறது. எந்த அலைவெண்ணும் 0-க்குக் கீழ் மதிப்பினைப் பெருது.

N-ல் A-பண்பைப் பெற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, (A)-யைக் கணக்கிட, A-யை ஓர் இயக்கும் கருவியாகக் கொண்டு, A.N எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஆகவே,

$$A.N=(A)$$

இதேபோல்,

$$\alpha.\ N=(\alpha).$$

$$A.\ N+\alpha.\ N=(A)+(\alpha).$$

$$(A+\alpha).\ N=N.$$

அல்லது

$$A+\alpha=1.$$

எனவே இக் குறியீட்டைச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எதிரிடைப் பண்பைக் குறிக்கும் எழுத்துகளை, நேரிடைப் பண்பைக் குறிக்கும் எழுத்துகளின் வாயிலாக வெளியிடலாம்.

அதாவது, $\alpha=1-A$

$$\beta=1-B$$

$$\alpha\beta=(1-A)\ (1-B)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\alpha\beta)=\alpha\beta.N&=(1-A)\ (1-B).\ N.\\&=(1-A-B+A.\ B)\ N.\\&=N-N.\ A-B.\ N+A.\ B.\ N\\&=N-(A)-(B)+(AB)\end{aligned}$$

A-என்பது விடுதியில் தங்குவோர்

α-என்பது வீட்டில் தங்குவோர்

B-என்பது புகை பிடிப்பவர்கள்

β-என்பது புகை பிடிக்காதவர்கள்

$\alpha\beta$-என்பது வீட்டில் தங்குவோரில் புகை பிடிக்காதவர்கள் $=240$.

இதை மேற்சொன்ன சமன்பாட்டின்படி,

$$(\alpha\beta) = N-(A)-(B)+(AB).$$
$$= 500-100-240+80$$
$$= 580-340 = 240.$$

இம் முறையைக்கொண்டு, நாம் கொடுத்திருக்கும் அலைவெண்கள் முரண்பட்டதா, அல்லவா என்று பரிசோதிக்க முடியும். இறுதியாக வரும் ஏதாவது ஒரு பிரிவு அலைவெண், எச் சந்தர்ப்பங்களிலாவது 0-க்குக் கீழுள்ள மதிப்பை ஏற்ருல். அவற்றின் பண்புகள் ஒன்றுக்கொன்று முரண்பட்டவை என்று திட்டவட்டமாகக் கூறலாம்.

பண்புகளின் சார்பு, சார்பில்லாத் தன்மையை அலைவெண் குறியீடு மூலம் விளக்குதல்

B-பண்புடையோரில் A-பண்பைப் பெற்றவரின் விகிதம், β-பண்புடையோரில் A-பண்பைப் பெற்றவரின் விகிதத்திற்குச் சமமாக இருந்தால், A, B பண்புகள் சார்பற்றன எனக் கொள்கிரேம்.

அதாவது,

(1) $$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)}$$

(2) $$\frac{AB}{B} > \frac{(A\beta)}{\beta}$$ என்று வருமாஞல்

A, B - பண்புகள் நேரிடைக் கூட்டுறவுடையன என்றும்,

(3) $$\frac{(A\,B)}{(B)} < \frac{(A\,\beta)}{(\beta)}$$ — என வருமாஞல்

A, B. பண்புகள் எதிரிடைக் கூட்டுறவுடையன என்றும் கொள்கிரேம்.

கூட்டுறவைக் காண மற்ருெரு விளக்கம்

A, B - பண்புகள் உறவற்றன என்ருல்

$$\frac{(A\,B)}{(B)} = \frac{(A\,\beta)}{(\beta)}$$ இச் சமன்பாட்டைக் K - எனக் கொள்வோம்.

ஆக $$\frac{(A\,B)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)} = K.$$

$$\therefore \quad (AB) = K\,(B)$$
$$(A\beta) = K\,(\beta)$$
$$(AB)+(A\beta) = K\,[(B)+(\beta)].$$
$$(A) = K.\,N.$$

$$\therefore K = \frac{(A)}{N}.$$

ஆக $\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)} = K = \frac{(A)}{N}.$

அதாவது, B பண்புடையவரில் A பண்புடையவரின் விகிதம், முழுத் தொகுதியிலுள்ள A பண்புடையவரின் விகிதத்திற்குச் சமமாக இருக்குமானல், A, B பண்புகள் உறவற்றன என்று கருதலாம்.

இச் சமன்பாட்டினையே,

$(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$ என்றும் எழுதலாம்.

எனவே, A, B என்ற இரு பண்புகளுக்குள்ள உறவை ஆராயும்போது,

(i) $(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$ ஆக வருமானல்,

A, B பண்புகள் உறவற்றன என்றும்,

(ii) $(AB) > \frac{(A)(B)}{N}$ என்று வருமானல், நேரிடை உறவுள்ளன என்றும்,

(iii) $(AB) < \frac{(A)(B)}{N}$ என்று வருமானல், எதிரிடை உறவுள்ளன என்றும் கொள்ளலாம்.

ஆக,

A, B பண்புகள் உறவற்றன என்பதற்குரிய நியதிகள் :

I. $\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)}$ —— (i) $\frac{(\alpha\beta)}{(B)} = \frac{(\alpha\beta)}{\beta}$ (ii)

$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$ —— (iii) $\frac{(A\beta)}{(A)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha)}$ —— (iv)

II. $(AB) = \frac{(A)\,(B)}{N}$ ——(i) $(A\beta) = \frac{(A)\,(\beta)}{N}$ —— (ii)

$(\alpha\beta) = \frac{(\alpha)\,(\beta)}{N}$ —— (iii) $(\alpha B) = \frac{(\alpha)\,(B)}{N}$ ——(iv)

II-வது நியதிகளிலிருந்து,

$$(AB)\,(\alpha\beta) - (A\beta)\,(\alpha B) = \frac{(A)(B)}{N}\cdot\frac{(\alpha)(\beta)}{N} - \frac{(A)(\beta)}{N}\cdot\frac{(\alpha)(B)}{N}$$

= 0 என வருகிறது.

அதாவது $(AB)\,(\alpha\beta) = (A\beta)\,(\alpha B)$.

எனவே,

III $(AB)\,(\alpha\beta) \overset{=}{\gtrless} (A\beta)\,(\alpha B)$ என வருமானால், முறையே A, B-பண்புகள் உறவற்றன, நேரிடை உறவைப் பெற்றன அல்லது எதிரிடை உறவைப் பெற்றன என்று அறிகிறோம்.

இம் மூன்று நியதிகளில் எதை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாம். பொதுவாக, கொடுத்திருக்கும் விவரத்திற்கேற்ற நியதிகளில் உறவை அறியலாம்.

A, B என்பன முறையே விடுதியில் தங்குவதையும், புகை பிடிப்பதையும் குறிப்பாகக் கொண்டால், மாதிரிப் பட்டியல் பின்வருமாறு அமைகிறது:

	B	β	மொத்தம்
A	(AB) 80	$(A\beta)$ 20	(A) 100
α	(αB) 160	$(\alpha\beta)$ 240	(α) 400
மொத்தம்	(B) 240	(β) 260	N 500

(1) இங்கு (AB) = 80. $\frac{(A)\cdot(B)}{N} = \frac{100 \times 240}{500} = 48$.

$\therefore (AB) > \frac{(A)(B)}{N}$ என வருகிறது.

ஆகவே, விடுதியில் வசிப்பதற்கும் புகை பிடிப்பதற்கும் தொடர்புண்டு என அறியலாம்.

(2) $\frac{(AB)}{(\alpha)} = \frac{80}{240} = \frac{1}{3}$; $\frac{(AB)}{(\beta)} = \frac{80}{260} = \frac{4}{13}$

$\therefore \frac{(A\beta)}{\beta} > \frac{(AB)}{(\beta)}$ என வருவதால்,

A, B பண்புகள் தொடர்புடையன என அறியலாம்.

(3) $\frac{(AB)}{A} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$.

$\frac{(\alpha\beta)}{\alpha} = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}$

$\frac{(AB)}{A} > \frac{(\alpha B)}{}$ என வருவதால்

A, B பண்புகள் தொடர்புடையன என்பதையே குறிக்கிறது.

(4) $(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (\alpha B) = 80 \times 240 - 20 \times 160$
$= 19200 - 3200$
> 0

இதன்மூலம் A, B பண்புகள் தொடர்புடையன என அறியலாம். இப் பட்டியலில் இரு பண்புகளும் அவைகளுக்கு எதிரான குணமுடைய இரு பண்புகளும் இடம்பெற்றிருப்பதால், இதை $2'' \times 2''$ இணைப்பட்டியலென்று கூறுவது வழக்கம்.

பண்புக் கெழு அல்லது பண்புக் கூட்டுறவுக்கெழு

A, B பண்புகளுக்குரிய இருபடி அலைவெண்கள் $(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (\alpha B) \gtreqless 0$ என்று வருமானல், அப்பண்புகள் முறையே நேரி

டைத் தொடர்புடையனவாவென்றும் தொடர்பற்றனவாவென்றும் அல்லது எதிரிடைத் தொடர்புடையனவாவென்றும் அறிந்து கொள்ளலாம். இந் நியதியினுல், தொடர்பு உண்டா, இல்லையா யென்றுதான் குறிப்பிட முடியுமேயன்றி, அப் பண்புகள் எந்த அளவுக்கு உறவைப் பெற்றுள்ளனவென்று அளவிடமுடியாது. ஆகவே, உறவை அளவிட்டுக் கூறுவதற்காகவும், ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும் நாம் சில உறவுக் கெழுக்களை வரையறுக்கின்ருேம். அக் கெழுக்களில் முக்கியமானதே 'யூல்' (Yule) என்பவரின் கூட்டுக் கெழுவாகும்.

$$Q = \frac{(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (\alpha B)}{(AB)\ (\alpha\beta) + (A\beta)\ (\alpha B)}$$

இக் கெழுவில் பகுதியின் மதிப்பு, தொகுதியின் மதிப்பைவிட அதிகம். ஆதலால் Q எப்போதும், —1லிருந்து +1 வரை எந்த மதிப்புகளையும் பெறமுடியும்.

$Q = -1$ என வரவேண்டுமானுல்,

$(AB)\ (\alpha\beta) = 0$ என்று ஆகவேண்டும்.

அதாவது $(AB) = 0$ அல்லது $(\alpha\beta) = 0$.

மேற்கூறிய கணக்கில் விடுதியில் வசிப்போர் அனைவரும் புகை பிடிக்காதவர் என்ருகிறது. அல்லது வீட்டில் வசிப்போரில் புகை பிடிக்காதவர் ஒருவருமில்லை என்கிறது. அதாவது புகை பிடிக்காதவர் அனைவரும் விடுதியிலும், புகை பிடிப்போர் அனைவரும் வீட்டில் தங்குகிறவர்கள் என்றும் அறியமுடிகிறது. ஆக $Q = -1$ என்று ஆகும்போது, Aயும் Bயும் முழுவதும் எதிரான உறவையுடையன என்று கூறலாம்.

$Q = 0$ என்று வருவதற்கு,

$(AB)\ (\alpha\beta) - (\alpha B)\ (A\beta) = 0$ என்ருக வேண்டும்.

அதாவது A, B பண்புகள் உறவற்றன என்பது பொருள்.

$Q = +1$ என்று வருவதற்கு,

$(A\beta)\ (\alpha B) = 0$ என்றும் $(A\beta) = 0$ என்றும்

$(\alpha B) = 0$ என்றும் வரவேண்டும்.

$(A\beta) = 0$

$(A) = (AB) + (A\beta)$ என்பது

$(A) = (AB)$ என்ருகிறது.

ஆதலால், A பண்புடையவர் அனைவரும் B-பண்பையும் உடையவர்கள் என்பது பொருள். நாம் எடுத்துக்கொண்ட மாதிரியில், விடுதியில் வசிப்போர் அனைவரும் புகை பிடிப்போர். அல்லது விடுதியில் வசிப்பதும் புகை பிடிப்பதும் எப்போதும் சேர்ந்தே வரும் என அறியலாம். அதேபோல் $(\alpha B) = 0$ ஆகும்போது, வீட்டில் புகை பிடிப்போர் ஒருவருமில்லை என்பதைத் தெளிவாக்குகிறது. ஆக, விடுதியில் வசிப்போரில் சிலர் புகை பிடிக்காமலிருந்தாலும், புகை பிடிப்பவரனைவரும் விடுதியில் வசிப்பவர்களே என்று உறுதியாகக் கூறலாம்.

Q ஆனது 0-க்கும், 1-க்கும் இடையில் இருக்குமானால், A, B பண்புகள் நேரிடை உறவுள்ளன என்றும், —1-க்கும் 0-க்குமிடையிலுள்ள மதிப்பை ஏற்றால், அப்பண்புகள் எதிரிடைத் தொடர்புள்ளன என்றும் கருதவேண்டும்.

ஒருதலையான கூட்டுறவு (Partial association)

இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட பண்புகளை உடையவர்களிடத்தில், ஒரு பண்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மற்றப் பண்புகளுக்கிடையேயுள்ள கூட்டுறவு நேரிடையானதா, எதிரிடையானதா என்று ஆராய முடியும். இதற்கு எடுத்துக்காட்டாக, A, B, C என்ற பண்புகளில், C பண்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு, நேரிடைத் தொடர்புடையன என்று கூறுவதற்கு $(ABC) > \frac{(AC)\,(BC)}{(C)}$ என்ற நியதியைக் கொண்டு அறிவிக்கலாம். இதனை 'ஒருதலைக் கூட்டுறவு' என்று கூறுகிறோம்.

முன்பு எடுத்துக்கொண்ட மாதிரியில், கல்லூரி ஆசிரியர்களையும் சேர்த்துக் கொண்டால், அவர்களிடம் விடுதியில் வசிப்பதும், புகை பிடிப்பதும் உறவற்றன என்று கூறமுடியாது. விடுதியில், வீட்டில் வசிப்போர் அனைவரையும் எடுத்துக்கொண்டு, மாணவர்கள் புகை பிடிப்பதும் விடுதியில் தங்குவதுமான உறவைக் கணக்கிட்டால், அது ஒருதலைக் கூட்டுறவு ஆகிறது.

'$x \times y$' இணைப்பட்டியல்

'2×2' இணைப்பட்டியலில், பண்புகள் ஒவ்வொன்றையும் இரு பிரிவாகப் பிரித்து 4 இருபடி அலைவெண்களைக்கொண்டு, பண்புகளின் உறவைக் கண்டோம். இதற்குப் பதிலாக A என்னும் பண்பை A_1, A_2....................A_x என x பிரிவுகளாகவும், B என்னும் பண்பை B_1 B_2,....................B_y என y பிரிவுகளாகவும் பிரித்து,

ஓர் இணைப்பட்டியலை அமைத்திடலாம். அப்போது $x \times y$—சிற்றறைகளைக் கொண்ட பட்டியல் கிடைக்கிறது. A_x-களை நிலையாகவும், B_y - களைக் கிடையாகவும் அமைத்து, உண்டாகும் xy எண்ணிக்கைகளையுடைய, இருபடி அலைவெண்களைக் காட்டும் அட்டவணையையே '$x \times y$' இணைப்பட்டியலாகக் கொள்கிறோம். இதனைக் கீழ்வரும் பட்டியல் விளக்குகிறது.

A / B	A_1	A_2	...	...	A_r	...	A_x	மொத்தம்
B_1	(A_1B_1)	(A_2B_2)						(B_1)
B_2								(B_2)
...								...
B_s					(A_rB_s)			B_s
...								
B_y							(A_xB_y)	(B_y)
மொத்தம்	(A_1)	(A_2)	...	...	(A_r)	...	(A_x)	N

இறுதியாகக் கிடை, நிலை வரிசைகளில் வரும் அலைவெண்கள் எல்லாம் ஒருபடியுள்ளனவாகவும், அட்டவணையின் கடைக் கோடியில் மொத்த மதிப்பாகவும் வருகின்றன.

இணைப்புக் கெழு

எல்லா A_x பண்புகளும், B பண்பில் $(A_r\ B_s) = \frac{(A_r)(B_s)}{N}$ என்ற சமன்பாட்டினை நிறைவேற்றினல், A, B பண்புகள் உறவற்றன என்று கொள்கிறோம். A_r, B_s என்பன உறவற்றிருக்கும்

போது, அவைகள் இயல்பாகவே சேர்ந்து வரக்கூடிய எண்ணிக்கை, $\frac{(A_r)(B_s)}{N}$ என்பதை $(A_r\ B_s)_0$ எனக் கொள்வோம். ஆக, உண்மையாக ஏற்படக்கூடிய எண்ணிக்கை (A_rB_s)க்கும், கணக்கியலாக நிகழக்கூடிய எண்ணிக்கை $(A_r\ B_s)_0$க்கும் உள்ள வேற்றுமையை δ_{rs}—எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

எனவே,

$$\delta_{rs} = (A_rB_s)-(A_rB_s)_0$$
$$= (A_rB_s) - \frac{(A_r)(B_s)}{N}$$

இவைகளின் கூடுதல் 0 ஆவதால், δ_{rs} ஒவ்வொன்றின் இருபடி வர்க்கங்களைக் கணக்கிட்டு, அவை ஒவ்வொன்றையும் இயல்பாக வரக்கூடிய $(A_r\ B_s)_0$ என்னும் எண்ணிக்கையால் வகுத்து, அதன் பின் அவைகளைக் கூட்டிவரும் மதிப்பினையே χ^2(கையின்) வர்க்கம் எனக் கொள்கிறோம்,

$$\text{ஆக, } \chi^2 = \Sigma\ \Sigma \left[\frac{\delta^2_{rs}}{(A_rB_s)_0}\right]$$

இதன் கூட்டுச் சராசரியே, 'சராசரி வர்க்க இணைப்பு' எனப்படும். இவ்விணைப்பை அளக்கவே 'கார்ல் பியர்ஸன்' ஒரு கெழுவை அமைத்துள்ளார். இதனை,

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} = \sqrt{\frac{N\phi^2}{N+N\phi^2}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}$$

(இங்கே ϕ^2 என்பது $\frac{\chi^2}{N}$ ஐக் குறிக்கிறது) என்ற நியதி வரையறுக்கிறது. இதுவே 'சராசரி வர்க்க இணைப்புக் கெழு' என்று சொல்லப்படுகிறது.

முறைக் காய்ச்சலைத் தடுக்க ஏற்படுத்தப்பட்ட ஒரு நடவடிக்கைக் குழு, 4,000 பேர் உள்ள ஒரு நகரத்தில் 960 பேருக்குக் கொயினா மருந்து கொடுத்தது. முறைக் காய்ச்சல் கண்டுள்ளவர்களின் பட்டியல் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளது:

	முறைக் காய்ச்சல் உள்ளவர்கள்	முறைக் காய்ச்சல் இல்லாதவர்கள்	மொத்தம்
கொயினு மருந்து சாப்பிட்டவர்கள்	40	920	960
கொயினு மருந்து சாப்பிடாதவர்கள்	540	2,500	3,040
மொத்தம்	580	3,420	4,000

	A	α
B	920	2,500
β	40	540

$$Q = \frac{(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (\alpha B)}{(AB)\ (\alpha\beta) + (A\beta)\ (\alpha B)}$$

$$Q = \frac{920 \times 540 - 40 \times 2500}{920 \times 540 + 40 \times 2500}$$

$$Q = \frac{396800}{596800} = 0{\cdot}665.$$

எனவே, கொயினு மருந்து உட்கொள்ளுதலுக்கும் முறைக் காய்ச்சல் வராமைக்கும் நேரிடை உறவுண்டு என்று அறியலாம்.

மாதிரி 1.

ஒரு கணிப்பாளர் 1,000 நபர்களைப் பேட்டி கண்டு கீழ்வரும் செய்தியைத் தெரிவித்தார்.

சாக்கலேட்டுகளை விரும்புவோர்		...	= 825
மிட்டாய்களை	,,	...	= 752
பிஸ்கெட்டுகளை	,,	...	= 420

சாக்கலேட்டுகளை, மிட்டாய்களை விரும்புவோர்	= 570
சாக்கலேட்டுகளை, பிஸ்கெட்டுகளை ,,	= 350
மிட்டாய்களை, பிஸ்கெட்டுகளை ,,	= 345
மிட்டாய், சாக்கலெட், பிஸ்கெட்டுகளை ,,	= 298

இச் செய்தி விவரம் முரண்பட்டதா என்று ஆராய்க.

இங்கு A என்பது சாக்கலேட்டு விரும்புவோரைக் குறிக்கட்டும்.
B என்பது மிட்டாய் ,, ,,
C என்பது பிஸ்கெட்டு ,, ,,
N என்பது மொத்தம்

(A) = 825 ; (B) = 752 ; (C) = 420 ; (AB) = 570 ;
(AC) = 350 ; (BC) = 345 ; (ABC) = 298

$$\therefore (\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma.\,N.$$
$$= (1-A)(1-B)(1-C)\,N.$$
$$= (1-A-B-C+AB+BC+CA)\,N.$$
$$= N-(A)-(B)-(C)+(AB)+(BC)+(CA)-(ABC)$$
$$= 1000-825-752-420+570+350+345-298.$$
$$= 2265-2295$$
$$= -30.$$

இங்கு $(\alpha\beta\gamma)$ அலை வெண்கள், 0-க்குக் கீழ் மதிப்பினைப் பெறுவதால், விவரங்கள் முரண்பட்டுள்ளன.

மாதிரி 2. $2'' \times 2''$ — இணைப்பட்டியலில் இருபடி அலை வெண்களை a, b, c, d என்று கொண்டால்

$$\chi^2 = \frac{(a+b+c+d)\ (ad-bc)^2}{(a+b)\ (a+c)\ (c+d)\ (b+d)}$$

என்று நிரூபிக்க,

	A	α	மொத்தம்
B	a	b	$a+b$
β	c	d	$c+d$
மொத்தம்	$a+c$	$b+d$	N $a+b+c+d$

(AB) = a ; (Aβ) = c ; (Bα) = b ; ($\alpha\beta$) = d.

A, B பண்புகள் உறவற்றன எனக் கொண்டால், அவைகள் இயல்பாகச் சேர்ந்துண்டாகும் எண்ணிக்கை $= (AB)_\circ = \dfrac{(A)(B)}{N}$.

$$\therefore\ \delta = (AB) - \frac{(A)(B)}{N}$$

$$= a - \frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}$$

$$= \frac{a^2 + ab + ac + ad - a^2 - ac - ab - bc}{a+b+c+d.}$$

$$= \frac{(ad - bc)}{a+b+c+d} = \frac{(ad - bc)}{N}$$

$$\chi^2 = \frac{\delta^2}{(AB)_\circ} + \frac{\delta^2}{(A\beta)_\circ} + \frac{\delta^2}{(\alpha B)_\circ} + \frac{\delta^2}{(\alpha\beta)_\circ}$$

$$= \delta^2 \left[\frac{1}{(AB)_\circ} + \frac{1}{(A\beta)_\circ} + \frac{1}{(\alpha B)_\circ} + \frac{1}{(\alpha\beta)_\circ}\right]$$

$$= \delta^2 \left[\frac{N}{(A(B)} + \frac{N}{(A)(B)} + \frac{1}{(\alpha)(B)} \frac{1}{(\alpha(\beta)}\right]$$

$$= N\delta^2 \left[\frac{(\beta) + (B)}{(A)(B)(\beta)} + \frac{(\beta) + (B).}{(\alpha)(\beta)(B)}\right]$$

$$= N\delta^2 \left[\frac{N[(\alpha) + (A)]}{(A)(B)(\alpha)(\beta)}\right]$$

$$= \frac{N\delta^2 N^2}{(A)(B)(\alpha)(\beta)}$$

$$= \frac{N(N\delta)^2}{(A)(B)(\alpha)(\beta)}$$

$$= \frac{N(ad - bc)^2}{(a+b)(b+c)(b+d)(c+d)}$$

கணக்குகள் :

1. நோய் நீக்க மருந்துச் சரக்கைப் பயன்படுத்தியதில் கீழ்க் கண்ட முடிவுகள் கிடைத்தன.

	A மருந்தைப் பயன் படுத்தினவர்கள்	α மருந்தைப் பயன் படுத்தாதவர்கள்	மொத்தம்
B குணமானவர்	35	55	90
β குணமடையாதவர்	50	260	310
மொத்தம்	85	315	400

$$Q = \frac{35\times260 - 55\times50}{35\times260 + 55\times50} = \frac{6350}{11850}$$

$$Q = \cdot53$$

மருந்தைப் பயன்படுத்தலுக்கும், குணமடைவதற்கும் நேரிடை உறவு உண்டு என அறியலாம்.]

2. பின் வரும் விவரத்திலிருந்து, ஊசிபோட்டுக்கொள்ளுத லுக்கும், எலும்புருக்கி நோய் வராமல் தடுத்துக் கொள்ளுதலுக்கு முள்ள உறவை வெளிப்படுத்தவும்.

	எலும்புருக்கி நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்	எலும்புருக்கி நோயால் பாதிக்கப்படாதவர்
தடுப்பு ஊசிபோட்டுக் கொண்டவர்	6	13
தடுப்பு ஊசிபோட்டுக்கொள்ளாதவர்	8	3

$$Q = \frac{13\times8 - 18}{104 + 18} = \frac{86}{122} = \cdot705$$

[தடுப்பு ஊசி போட்டுக் கொள்ளுதலுக்கும், நோயால் பாதிக்கப் படாமைக்கும் மிக நெருங்கிய நேரிடை உறவுண்டென அறியலாம்.

3. கார் ஓட்டும் வேலைக்கு ஆள் எடுப்பதில், முதல் இறுதித் தேர்வுகளில் கிடைத்த விவரத்தைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் அறிவிக்கிறது. இணைப்புக் கெழு அமைத்து, முதல், இறுதித் தேர்வுகளிடையே உள்ள உறவைக் காண்க.

		முதல் தேர்வு			
		தேறினவர் A	தேருதவர் a		
இறுதித் தேர்வு	தேறினவர் B	605	135	740	
	தேருதவர் β	195	65	260	
	மொத்தம்	800	200	1.000	

$$Q = \frac{605 \times 65 - 135 \times 195}{605 \times 65 + 135 \times 195} = \frac{13000}{65650}$$

$$Q = 0{\cdot}2$$

[முதல் இறுதித் தேர்வுகளிடையே சிறு நேரிடைத் தொடர்பு உண்டென அறியலாம்.]

4. 200 மாணவர்கள் பாட்டிலும் கணிதத்திலும் அவர்களுக்குள்ள திறமைக்குத் தகுந்தவாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளனர். பாட்டுக்கும் கணிதத்துக்கும் உறவுண்டா என்று ஆராய்க.

பாட்டில் தரப்பிரிவு	கணிதத்தில் தரப்பிரிவு A அதிக மார்க்கு	B நடுத்தர மார்க்கு	C கீழ் மார்க்கு	மொத்தம்
α மேல்தரம்	35 (20)	20 (24)	10 (21)	65
β நடுத்தரம்	18 (22)	40 (27)	13 (22)	71
γ கீழ்த்தரம்	9 (20)	15 (24)	40 (20)	64
மொத்தம்	62	75	63	200

$$\chi^2 = \frac{(35-20)^2}{20} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(10-21)^2}{21}$$

$$+ \frac{(18-22)^2}{22} + \frac{(40-27)^2}{27} + \frac{(13-22)^2}{22}$$

$$+ \frac{(9-20)^2}{20} + \frac{(15-24)^2}{24} + \frac{(40-20)^2}{20}$$

$$= 57{\cdot}7$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} = \sqrt{\frac{57{\cdot}7}{257{\cdot}7}} = 0{\cdot}047$$

பயிற்சி

1. டைபாய்டு நோயைத் தடுப்பதற்காகச் சிலருக்குத் தடுப்பு ஊசி போட்டதின் விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஊசி போட்டுக் கொள்வதால் நோயைத் தடுக்க முடியுமா என்பதை ஆராய்க.

	பாதிக்கப்பட்டோர்	பாதிக்கப்படாதவர்கள்
ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்கள்	11	272
ஊசிபோட்டுக் கொள்ளாதவர்	61	480

[விடை :

ஊசி போட்டுக் கொள்வதற்கும் நோயைத் தடுப்பதற்கும் ஒரு நேரிடைத் தொடர்புண்டு. $Q=0{\cdot}51°$]

2. ஒரு ராண்டம் மாதிரித் தேர்வாராய்ச்சியில் சட்டமுறையாக ஓட்டுரிமை காண வயதை 21-லிருந்து 18-க்கு மாற்றலாமா என்ற வினாவிற்கு, 400 ஆண்களும் 300 பெண்களும் அளித்த தகவல்கள் பின்வருமாறு :

ஆண்களில் 200 பேர் மாற்றவேண்டும் என்றும், 160 பேர் கூடாது என்றும், மற்ற 40 பேர் நடுநிலைமை வகித்தும் கூறினர்.

பெண்களில் 150 பேர் மாற்றவேண்டும் என்றும், 140 பேர் கூடாதென்றும், மற்ற 10 பேர் நடுநிலைமை வகித்தும் கூறினர்.

இனத்திற்கும், கேள்வியின் கருத்திற்கும் உறவு உண்டா என்பதை ஆராய்க.

3. பின்வரும் அட்டவணை தந்தை வேலையில் ஈடுபடுவதற்கும், உரிமையிழப்பதற்கும் உள்ள நிலைமையை விளக்குகிறது. இதையொட்டித் தந்தை வேலையின்றி இருந்தால், குடும்பத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் உரிமையற்றவராக இருக்க நேரிடும் என உறுதியாகக் கூற முடியுமா என்பதை ஆராய்க.

	வேலையில் ஈடுபடாதவர்கள்	வேலையில் ஈடுபட்டவர்கள்	மொத்தம்
உரிமை இழக்காதவர்	100	480	580
உரிமை யிழந்தவர்	100	320	420
மொத்தம்	200	800	1,000

[விடை :

தந்தை வேலையில் ஈடுபடுவதற்கும், உரிமையை இழக்காமலிருப்பதற்கும், மிக நெருங்கிய நேரிடை உறவு உண்டு.

$$\left.\begin{aligned}\chi^2 &= 11{\cdot}58 \\ \gamma &= 1.\end{aligned}\right]$$

4. உணவுப் பங்கீட்டுக் கணக்கெடுப்பில் பின்வரும் செய்திகள் கிடைத்தன :

வரிசை எண்	வகை	எண்ணிக்கை	
1.	முழுத்தொகுதி	1,000	N
2.	நிலையாகக் குறிப்பிட்ட இடத்தில் தங்குபவர்	510	(A)
3.	ஆண்கள்	483	(B)
4.	அரிசி உண்பவர்கள்	417	(C)
5.	நிலையாகத் தங்கும் ஆண்கள்	189	(AB)
6.	நிலையாகத் தங்குவோரில் அரிசி உண்போர்	140	(AC)
7.	அரிசி உண்ணும் ஆண்கள் ...	90	(BC)
8.	நிலையாகக் குறிப்பிட்ட இடத்தில் தங்கும் ஆண்களில் அரிசி உண்போர்	9	(ABC)

இச் செய்திகள் முரண்பட்டுள்ளனவா என்றாராய்க.

[விடை : முரணில்லாதவை.]

5. ஓர் இணைப்பட்டியலில் பின்வரும் செய்திகள் தரப்பட்டுள்ளன. இவைகள் முரண்பட்டுள்ளனவா என்பதைக் கண்டறிக.

N = 1,000; (A) = 525; (B) = 312; (C) = 470; (AB) = 42; (AC) = 147; (BC) = 86; (ABC) = 25.

[விடை : $(\alpha\beta\gamma) = -32$; செய்திகள் முரண்பட்டவை.]

10. வாய்ப்பின் நியதிகள்

(Theorems of Probability)

மனத்தில் தோன்றும் சில எண்ணங்கள், கருத்துகள் முதலியன வற்றைப் போதுமான அளவு திட்டவட்டமாக வரையறுத்துக் கூற இயலாது. இவ்விதக் கருத்துகளெல்லாம் இயற்கையாக நிகழக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளில்தான் எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன. வாய்ப்பு என்பதும் இத்தகைய கருத்தினுள் ஒன்ருகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, அதன் வாய்ப்புக் காரணத்தை யொட்டியுள்ளது. பொதுவாக, நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதை ஓரளவுக்கு அளவிட்டுக் கூறுவதே ஊக அளவை (Probability) ஆகும். இவ் விதம் அளவிட்டுக் கூறுவது பொது அறிவுக்கு முரண்படாமல் இருத்தல் நலம்.

ஒரு பகடையை யெடுத்து, அதன் ஆறு பக்கங்களிலும் முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களைக் குறிப்பிடவும். பகடையை ஒரு தடவை உருட்டும்பொழுது, இலக்கத்தால் குறிப்பிடப்பட்ட ஆறு பக்கங்களில் ஏதேனும் ஒன்று வரும். எந்த இலக்கத்தையுடைய பக்கம் வருமென முன்னரே அறியமுடியாது. ஏனெனில், அது அதன் வாய்ப்புக் காரணத்தைச் சார்ந்துள்ளது. பகடையை ஒரு தடவை உருட்டும்பொழுது, நமக்குத் தெரிந்த நிலைமைகள்: ஒன்று, அது ஒரே கனசதுர வடிவமுள்ளது; இரண்டாவதாக, அது ஒருபுறச் சாய் பற்ற சிறந்த பகடை; மேலும், பகடையை உருவாக்கும் மூலப் பொரு ளானது ஒரே இனத்தைச் சார்ந்துள்ளது. இவைகளைத் தவிர, நமது அறிவிற்குப் புலப்படாத மற்றக் காரணங்களாலும், பகடையில் வரும் நிகழ்ச்சி இயங்கக் கூடியது. பகடையைப் பிடிக்கும் முறையும் உருட்டும் வேகமும் உருட்டுபவனின் விருப்பத்தைப் பொறுத்திருக் கிறது. எனவே, இவ்வித நிலைகளெல்லாம் பகுத்தறிவிற்கப்பாற் பட்டது. எனினும், மேற்கூறிய நிலைகளையெல்லாம் ஒருவன் அறிந்த

தாகவே வைத்துக்கொண்டாலும், உருட்டியவுடன் எந் நிகழ்ச்சி ஏற்படும் என்பதை எவராலும் உறுதியாக அரிதியிட்டுக் கூற முடியாது.

ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள கறுப்பு, சிவப்பு நிறமுள்ள கோலிகள் ஒரு பையிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். கண்ணை மூடிக்கொண்டு, பையிலிருந்து ஒரு கோலியை எடுத்தோமானால், அதன் நிறம் கறுப்பு அல்லது சிவப்பாக இருக்கும். ஆனால், எந்த நிறம் என்று உறுதியாகச் சொல்லமுடியாது. ஏனெனில், அது வாய்ப்புக் காரணத்தைச் சார்ந்துள்ளது. இச் சோதனையில் நமக்குத் தெரிந்த உண்மைகளாவன :

(i) கோலிகளின் எண்ணிக்கை சமம்; (ii) அவைகளின் நிறம் கறுப்பு அல்லது சிவப்பு; (iii) குறிப்பிடும்படி அவைகளில் வேறுபாடு இல்லை. இறுதியில் வரும் விளைவு நமக்குப் புலப்படாத சில காரணங்களாலும் வசப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. கோலிகள் பையில் வீற்றிருக்கும் இட அமைப்பு என்னவென்று கோலியை எடுக்குமுன் வரையறுத்துக் கூற முடியாது.

எனவே, ஓர் ஊசியைக் கொண்டு ஒரு சிலரைக் குத்தினால் அவர்களுக்குள் ஏற்படும் வலியுணர்ச்சியின் அளவானது எவ்வாறு மாறுபடக் கூடியதோ, அவ்வாறே ஊக அளவும் வாய்ப்புக் காரணங்களினால் மாறுபடக் கூடியதே.

நிகழ்ச்சிகளில் சிலவற்றை உறுதியாக ஏற்படுமென்றும், உறுதியாக ஏற்படாதென்றும் கூறமுடியும். இன்னும் சிலவற்றை ஏற்படுமா அல்லது ஏற்படாதா என்று திட்டவட்டமாகக் கூற முடியாது. இவ்வாறு திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியாத சந்தர்ப்பங்களில்தான் ஊக அளவைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதிலிருக்கும் ஐயப்பாட்டினை நிவர்த்தி செய்யலாம். எனவே, எந்த ஒரு நிகழ்ச்சி வாய்ப்புக் காரணத்தை யொட்டி நிகழக் கூடியதாகவும், அடுத்தடுத்து (repetitive) ஏற்படக் கூடியதாகவுமுள்ளதோ, அவ்வித நிகழ்ச்சிக்கே ஊக அளவை பயனளிக்கிறது.

ஒரு நிகழ்ச்சி ஐயத்திற்கு இடமில்லாமல் உறுதியாக நிகழுமானால் அதன் ஊக அளவையை '1' என்றும், உறுதியாக, நிகழாது என்று அறிவோமானால், அதன் ஊக அளவையை '0' என்றும் குறிப்பது வழக்கம். ஒருவன் என்றைக்காவது ஒருநாள் இறந்தேயாக வேண்டும். ஆகவே, இதன் ஊக அளவையை '1'என்று கொள்கிறோம். புயலால் சூழப்பட்ட பரந்த கடலை நீந்திக் கரை சேர்வது இயலாத காரியம். எனவே இதன் ஊக

அளவை '0' என்று கொள்கிறோம். இத்தகைய நிகழ்ச்சிகளைத் தவிர மற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படுவதற்குரிய ஊக அளவையின் மதிப்புகளெல்லாம் '0' -க்கும் '1' க்கும் இடையே வருவதாகும்.

இரு எதிர்பாராத நிலையிலுள்ள நிகழ்ச்சிகளில் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு சரியாக இருக்குமானால், அவ்வித நிகழ்ச்சிகளை 'சரிநிகரான நிகழ்ச்சிகள்' (equally probable) எனக் கூறலாம்.

இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொன்று நிகழும்பொழுது மற்ற நிகழ்ச்சி ஏற்படாவண்ணம் தடைபடுமேயானால், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளை 'ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை' (mutually exclusive) பெற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொள்கிறோம்.

ஊக அளவையில் இரு பிரிவுகள் உள்ளன. (i) கணக்கியல் ஊக அளவை (நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கு முன்னரே தீர்மானிக்கப்படும் ஊக அளவை); (ii) புள்ளியியல் ஊக அளவை (நிகழ்ச்சி ஏற்பட்டபின் தீர்மானிக்கப்படும் ஊக அளவை) இவைகளை விவரிப்போம்.

கணக்கியல் ஊக அளவை
(Mathematical Probability or Apriori Probability)

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்பொழுது தலையும் விழலாம்; அல்லது பூவும் விழலாம். ஆக இருவித நிகழ்ச்சிகள் ஏற்பட வாய்ப்பு உள்ளது. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று ஏற்படும்பொழுது, மற்றது தடுக்கப்படுகிறது. ஆனால், இவ்விரண்டில் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்தே தீரும். எனவே, ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் ஏற்படுவதற்குரிய ஊக அளவையை '$\frac{1}{2}$' எனக் கொள்கிறோம். இவ்வூக அளவையைக் கணக்கிடும் பொழுது, மொத்த ஊக அளவை '1'-ஐ ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் சமமாகப் பகிர்ந்து கொடுத்துள்ளோம். மேலும், நிகழ்ச்சிகள் எல்லா விதங்களிலும் நிகழ்வதை ஆராய்ந்து, ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் ஊக அளவையானது தீர்மானிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒரே சீரான 6 பக்கங்களுள்ள ஒரு பகடையை உருட்டும் பொழுது, ஏதாவது ஒரு பக்கம் மேல் நோக்கி வரக்கூடும். அப்படி வரும்பொழுது மற்ற 5 பக்கங்கள் மேல்நோக்கி வராமல் தவிர்க்கப் படுகின்றன. எனவே, மொத்த ஊக அளவை '1' ஐ ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் சமமாகப் பகிர்ந்து, அவை ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற் குரிய ஊக அளவையை $\frac{1}{6}$ எனக் கொள்கிறோம்.

ஒரு முயற்சியில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழுமானல், அதனை வெற்றி எனவும், மற்ற நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் நிகழாததால் அவைகளைத் தோல்விகள் எனவும் கருதுவது வழக்கம். எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி 'a' தடவைகள் நிகழ்வதற்குரியதாகவும் (வெற்றிகளாகவும்) 'b' தடவைகள் நிகழ முடியாததாகவும் (தோல்விகளாகவும்) இருந்து, மொத்த நிகழ்ச்சி ('$a+b$') களில் ஒவ்வொன்றிற்கும் சமவாய்ப்பு அளிக்கப்பட்டும், ஒரு நிகழ்ச்சி தடைப்படுமேயுமானல், அக் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஒரு முயற்சியில் (வெற்றியாக) நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{a}{a+b}$ ஆகும்.

வெற்றிக்குரிய ஊக அளவையை 'p' எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஆதலால் $p = \frac{a}{a+b}$.

குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படாமலிருப்பதற்குரிய (தோல்விக்குரிய) ஊக அளவை $= \frac{b}{a+b}$. தோல்விக்குரிய ஊக அளவையை 'q' எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

எனவே $p+q = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$

எப்பொழுதும் $\boxed{p+q=1}$

இங்கு ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, ஏற்படாமலிருப்பது ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைகளை முன்கூட்டியே (முன்னரே) தெரிவிக்கப்படுவதனல் இவ்வித ஊக அளவையைக் 'கணக்கியல் ஊக அளவை' எனக் கூறுகிறேம்.

புள்ளியியல் ஊக அளவை (Statistical Probability)

ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி எத்தனை தடவைகள் வெற்றியாகவும், தோல்வியாகவும் நிகழக்கூடும் என்று முன்கூட்டியே தெரியாமலிருக்கலாம். இச் சந்தர்ப்பத்தில் ஒரு முயற்சியில் நிகழ்ச்சி வெற்றியடைவதற்குரிய ஊக அளவையை, முயற்சியைப் பலதடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்து, அவைகளில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படும் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கவேண்டிய நிலைமை ஏற்படுகிறது.

ஒரு நாணயத்தை (ஒரு புறச் சாய்வற்ற) 10 தடவைகள் சுண்டி, அவைகளில் தலைகள் எத்தனை தடவைகள் தென்படுகின்றன என்பதைக் காணவும். பிறகு நாணயத்தை 100, 1000, 10000,...... தடவைகள் சுண்டி, அவைகளில் தலைகள் தென்படும் எண்ணிக்கையைக் கவனித்திடவும். இவற்றிலிருந்து ஒரு சுண்டுதலில் தலை வருதற்குரிய ஊக அளவையை முடிவாகத் தீர்மானித்துக் கூற முடியாது. எனவே, தலைகள் வரும் எண்ணிக்கையை, சுண்டின எண்ணிக்கையின் விகிதமாக மாற்றி ஆராயவும்; சுண்டுதலின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, இவ் விகிதங்கள் இறுதியாக '$\frac{1}{2}$' ஐ அணுகும் என ஊகித்தறிய முடிகிறது. ஆதலால் ஒரு முயற்சியில் தலை வருதற்குரிய ஊக அளவையை '$\frac{1}{2}$' எனக் கொள்கிறோம். இங்கு ஊக அளவையானது, நிகழ்ச்சிகள் ஏற்பட்டபின் தீர்மானிக்கப் பட்டுள்ளது. இவ்விதமாகக் கணக்கிடும் ஊக அளவையைப் 'புள்ளியியல் ஊக அளவை' (Statistical Probability or Aposteriori Probability) எனக் கூறுவது வழக்கம்.

கணக்கியல் ஊக அளவை, 'பெற்றறி முறை' யைக் (method of deduction) கையாண்டு கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. ஆனால் புள்ளியியலில் 'தொகுத்தறி முறை' யின் (method of induction) அடிப்படையில் வந்துள்ளது. பெரும்பாலும் நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதின் எண்ணிக்கையை முன்னரே தீர்மானிக்க முடியாத காரணத்தால் பரிசோதனைகள் மூலம் நிகழ்ச்சிகள் உண்மையாகவே ஏற்படுவதை ஆதாரமாகக் கொண்டுதான், ஊக அளவை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. புள்ளியியல் ஊக அளவையின் இறுதி நிலை மதிப்பே, கணக்கியலில் வரும் இலட்சிய ஊக அளவையாகும். எனவே, புள்ளியியலில் வரும் ஊக அளவையை, கணக்கியலாக வரும் ஊக அளவையின் மதிப்பீடாகக் கருதலாம்.

ஒரு நாணயத்தைக் குறைந்த தடவைகள் சுண்டும்பொழுது, தலைகள் வருவது வாய்ப்பினால் மிக எளிதாகப் பாதிக்கப் படுவதையும், சுண்டுதலின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, இதே வாய்ப்பானது தலைகள் அநேக தடவைகள் வருவதற்கு வியக்கத் தக்கவாறு ஆதரவாக இருப்பதையும் நமது அனுபவத்தில் காணலாம்.

ஊக அளவையின் கூட்டு நியதி
(Addition Theorem of Probability)

ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தையும் ஒருங்கே ஆராயும்பொழுது, நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதின் ஊக அளவை, நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவையின் கூடுதலாகும்.

ஒன்றையொன்று விலக்கிடும் தன்மை பெற்ற பல நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய மொத்த எண்ணிக்கையை N எனக் கொள்ளவும். இந் நிகழ்ச்சிகளில் K குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக, a_1, a_2,.............a_k தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொள்ளவும். எனவே,

$$\left.\begin{array}{c}\text{முதல் நிகழ்ச்சி தனியாக ஏற்படு}\\ \text{வதற்குரிய ஊக அளவை}\end{array}\right\} = \frac{\text{முதல் நிகழ்ச்சி சாதகமாக ஏற்படுவதற்குரிய எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{a_1}{N}.$$

இதே போல 2ஆவது, 3ஆவது,......, Kஆவது நிகழ்ச்சி ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை முறையே,

$$\frac{a_2}{N}, \frac{a_3}{N}, \ldots\ldots \frac{a_k}{N} \text{ ஆகும்.}$$

K நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதை விலக்கிடும் தன்மை பெற்றுள்ளதால் a_1, a_2, ... a_k நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் தனிப்பட்டவைகளே. ஆதலால், K நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதற்குரிய எண்ணிக்கை $= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_k$.

எனவே, K நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதற்குரிய

$$\text{ஊக அளவை} = \frac{\text{ஏதாவதொரு நிகழ்ச்சி வருவதற்குச் சாதகமான எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த எண்ணிக்கை.}}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_k}{N}$$

$$= \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_k}{N}$$

= K நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக ஏற்படுவதற்குரிய ஊக அளவைகளின் கூடுதல்.

சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவது, மற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் ஏற்படுவதைப் பாதிக்காமலிருக்குமானால், நிகழ்ச்சிகளனைத்தும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் என்று கருதப்படும்.

ஊக அளவையின் பெருக்கு நியதி (Multiplication Theorem of Probability)

சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளனைத்தும் ஒரே காலத்தில் நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை, தனித்தனியாக ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவைகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

இரு சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் நிகழ்ச்சி 'n_1' தடவைகளில் 'a_1' தடவைகள் நிகழ்வதாகவும், இரண்டாவது நிகழ்ச்சி 'n_2' தடவைகளில் 'a_2' தடவைகள் நிகழ்வதாகவும் கொள்வோம். p_1, p_2 என்பன இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் ஊக அளவையைக் குறித்தால், $p_1 = \frac{a_1}{n_1}$, $p_2 = \frac{a_2}{n_2}$ என்று வரும்.

நிகழ்ச்சிகள் இரண்டும் சார்பிலாத் தன்மையைப் பெற்றிருப்பதால், முதல் நிகழ்ச்சி ஏற்படும் a_1 தடவைகள் ஒவ்வொன்றையும், இரண்டாவது நிகழ்ச்சி ஏற்படும் a_2 தடவைகள் ஒவ்வொன்றுடனும் இணைக்கமுடியும். எனவே, இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே காலத்தில் நிகழ்வதற்குரிய தடவைகள் $a_1 . a_2$ ஆகும். இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்று சேர்த்து ஆய்வதற்குரிய மொத்த எண்ணிக்கை $n_1 . n_2$. எனவே, இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே காலத்தில் நிகழ்வதற்குறிய ஊக அளவை

$$= \frac{a_1 . a_2}{n_1 . n_2} = \frac{a_1}{n_1} . \frac{a_2}{n_2}$$

$= p_1 . p_2 =$ நிகழ்ச்சிகள் தனித்தனியாக நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவைகளின் பெருக்குத் தொகை.

நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று சார்ந்திருந்தபோதிலும்கூட, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் அடுத்தடுத்து (in succession) வருவதற்குரிய ஊக அளவையை, பெருக்கு நியதியைப் (Multiplication law) பயன்படுத்திக் காணலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) இரு பகடைகளை உருட்டும்பொழுது அவைகளின் பக்கங்களில் குறிப்பிட்டுள்ள இலக்கங்களின் கூடுதல் 7 அல்லது 8 ஆக வருவதற்குரிய ஊக அளவையைக் காண்க.

முதல் பகடையில் நிகழக்கூடிய 6 நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றையும், இரண்டாவது பகடையின் 6 நிகழ்ச்சிகளுடன் பிணைக்கும்பொழுது மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 = 36$. இவைகளனைத்தும் ஒரே வாய்ப்பைப் பெற்றுள்ளன. இரு பகடையில் வரும் இலக்கங்களின் கூடுதல் 7 ஆக வரும் தடவைகள் $=$ (1, 6), (2, 5), (3, 4),

(4, 3), (5, 2), (6, 1) = 6. அதேபோல் இரு பகடையில் வரும் இலக்கங்களில் 8 ஆக வரும் தடவைகள் = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) = 5. இலக்கங்களின் கூடுதல் 7 அல்லது 8 ஆக வரும் சாதகமான தடவைகள் = 6 + 5 = 11. எனவே, ஊக அளவு $= \frac{11}{36}$.

(2) ஒரு பையில் 5 வெள்ளை, 7 கறுப்பு, 8 சிவப்புக் கோலிகள் உள்ளன. ஏதாவதொரு கோலியை எடுத்தால், அதன் நிறம் சிவப்பு அல்லது வெள்ளையாக வருவதற்குரிய ஊக அளவையைக் கணக்கிடுக.

பையிலுள்ள மொத்த கோலிகள் = 5+7+8 = 20.

கோலியின் நிறம் சிவப்பாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{8}{20}$

கோலியின் நிறம் வெள்ளையாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{5}{20}$

ஈண்டு, நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கிடும் தன்மையைப் பெற்றுள்ளன. எனவே,

கோலியின் நிறம் சிவப்பு (அல்லது) வெள்ளையாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{8}{20} + \frac{5}{20}$

$= \frac{13}{20}$.

(3) ஒரு பெட்டியில் 8 சிவப்பு, 12 வெள்ளைக் குண்டுகள் உள்ளன. ஏதாவதொரு குண்டை எடுத்தால் அதன் நிறம் சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை யாது ?

பையிலுள்ள மொத்த குண்டுகள் = 8+12 = 20.

சிவப்பு நிறமுள்ள குண்டுகளின் எண்ணிக்கை = 8.

எனவே, எடுத்த குண்டின் நிறம் சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{\cdot}4$.

(4) ஒரு பையில் முறையே 8, 4, 6, 2 வெள்ளை, கறுப்பு, மஞ்சள், சிவப்புக் கோலிகள் உள்ளன. தற்செயலாக நிறத்தைப் பார்க்காமல் ஏதாவதொரு கோலியை எடுத்து அதன் நிறம் முறையே வெள்ளை, கறுப்பு, மஞ்சள், சிவப்பு என வருவதற்குரிய ஊக அளவைகளைக் காண்க.

கோலியின் நிறம் வெள்ளை, சிவப்பு அல்லது மஞ்சளாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவையும் கண்டிடுக.

பையிலுள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை $= 8+4+6+2=20$

எடுத்த கோலி வெண்மை நிறமாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{8}{20} = \cdot 4$

,, ,, கறுப்பு ,, ,, $= \frac{4}{20} = \cdot 2$

,, ,, மஞ்சள் ,, ,, $= \frac{6}{20} = \cdot 3$

,, ,, சிவப்பு ,, ,, $= \frac{2}{20} = \cdot 1$

எடுத்த கோலி வெள்ளை, மஞ்சள் அல்லது சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \cdot 4 + \cdot 3 + \cdot 1$

$= \cdot 8$

(5) ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஏதாவது இரு சீட்டுகளை எடுத்து அவைகளில் முதலில் சிவப்பு நிறம், இரண்டாவது கறுப்பு நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவையைக் கணக்கிடுக.

சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 52$

அவைகளில் 26 சீட்டுகள் சிவப்பு நிறமாகவும், மற்ற 26 சீட்டுகள் கறுப்பு நிறமாகவும் உள்ளதென்பதை யாவரும் அறிவர்.

எனவே, முதலில் எடுத்தது சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

பிறகு சீட்டுக் கட்டில் உள்ள சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 51$. இவைகளிலிருந்து இரண்டாவதாக எடுக்கப்படும் சீட்டுக் கறுப்பு நிறமாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{26}{51}$.

[52 சீட்டுகளில், முதல் முறையாக எடுக்கும்போது சிவப்பு வருவதானால், இரண்டாவது முறை எடுக்கும்போது, சீட்டுக் கட்டில் 25 சிவப்பு நிறச் சீட்டுகளும், 26 கறுப்பு நிறச் சீட்டுகளும் உள்ளன என்பதை அறியவும்.]

இங்கு சீட்டு எடுக்கப்பட்டுவரும் நிறத்தை ஒரு நிகழ்ச்சியாகக் கொண்டால், இரு நிகழ்ச்சிகளும் தனித்தவை (independent). எனவே, எடுத்த இரு சீட்டுகளில் முதலில் சிவப்பாகவும் பிறகு கறுப்பாகவும் இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2} \times \frac{26}{51} = \frac{13}{51}$.

(6) ஒரு பையில் 6 சிவப்பு நிறமுள்ள கோலிகளும், 9 கறுப்பு நிறமுள்ள கோலிகளும் உள்ளன. அடுத்தடுத்து வரும் இரு கோலிகள் சிவப்பு நிறமுடையனவாக, முதல் கோலியை எடுத்தபின் மறுபடியும் பையில் போடும்பொழுதும், போடாமல் இருக்கும்பொழுதும் இருப்பதற்குரிய ஊக அளவையைக் காண்க.

பையில் 6 சிவப்பு, 9 கறுப்பு நிறங்களுள்ள கோலிகளுள்ளன. எனவே, முதலில் எடுக்கும் கோலி சிவப்பு நிறமுள்ளதாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. முதலில் எடுத்த கோலியை மறுபடியும் பையினுள் போடும்பொழுது, பையில் முன்னிருந்தபடியே கோலிகள் இருப்பதனால், இரண்டாவதுமுறை எடுக்கும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாகவருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

இரண்டாவதாக எடுக்கும் முறை, முதலாவதாக எடுக்கும் முறைக்குத் தனித்துள்ளது. எனவே, இரு தடவைகளிலும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக உள்ளதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

முதலில் எடுக்கும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. முதல்தடவையில் சிவப்பு நிறக் கோலி வந்தவுடன், அதை மறுபடியும் பையில் போடாமலிருக்கும் பொழுது, பையில் 5 சிவப்புக் கோலிகளும், 9 கறுப்புக் கோலிகளும் உள்ளன. எனவே, இரண்டாவது தடவை பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{5}{14}$

எனவே, இரு தடவைகளிலும் சிவப்பு நிறக் கோலி வருவதற்குரிய ஊக அளவை $\Big\} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{7}$

(7) ஒரு பையில் 2 சிவப்பு, 2 கறுப்பு நிறங்களுள்ள கோலிகளும், மற்றொரு பையில் 3 சிவப்பு, 4 கறுப்பு நிறங்களுள்ள கோலிகளும் உள்ளன. (1) ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரு கோலியை எடுத்தால், அவைகளிரண்டும் ஒரே நிறங்களாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை யையும், (2) ஏதாவது ஒரு பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக வருவதற்குரிய ஊக அளவையையும் காண்க.

(1) முதல் பையில் 2 சிவப்பு, 2 கறுப்பு நிறமுள்ள கோலிகள் உள்ளன. எனவே, ஏதாவதொரு கோலியை யெடுக்கும்பொழுது அதன் நிறம் சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய,

$$\text{ஊக அளவை} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

அதே போல், அது கறுப்பு நிறமுள்ளதாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}$.

இரண்டாவது பையில் 3 சிவப்பு, 4 கறுப்புக் கோலிகள் உள்ளன.

எனவே, கோலியின் நிறம் சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{3}{7}$.

அதேபோல் கோலியின் நிறம் கறுப்பாக உள்ளதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{4}{7}$.

ஒவ்வொரு பையிலிருந்து ஒவ்வொன்றாக எடுத்துவரும் இரண்டு கோலிகளின் நிறம் ஒத்திருப்பதற்குரிய

$$\text{ஊக அளவை} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{4}{14} = \frac{7}{14}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(2) இரு பைகளுள்ளன. எனவே, ஏதாவதொரு பையை எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}$.

முதல் பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக உள்ளதற்குரிய ஊக அளவை $\Big\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

இரண்டாவது பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக உள்ளதற்குரிய ஊக அளவை $\Big\} = \frac{3}{7}$.

எனவே, ஏதாவது ஒரு பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கோலியின் நிறம் சிவப்பாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right]$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7+6}{14}$$

$$= \frac{13}{28}.$$

பயிற்சி

1. ஒரு பையில் முறையே 6, 10, 12 வெள்ளை, கறுப்பு, சிவப்பு நிறமுள்ள கோலிகள் உள்ளன. ஏதாவதொரு கோலியை எடுத்து அதன் நிறம் கறுப்பாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவையைக் காண்க.

(விடை : $\frac{5}{14}$)

2. 1ஆவது கணக்கில் எடுத்த கோலியின் நிறம் சிவப்பு அல்லது வெள்ளையாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவையைக் காண்க.

(விடை : $\frac{9}{14}$)

3. மூன்று பைகளில் முறையே ஒரு பவுன், 4 ரூபாய் நாணயங்களும்; 2 பவுன், 3 ரூபாய் நாணயங்களும்; 3 பவுன், 2 ரூபாய் நாணயங்களும் உள்ளன. ஏதாவதொரு பையை எடுத்து, அதிலிருந்து எடுத்துவரும் நாணயம் பவுனாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவையைக் காண்க.

(விடை : $\frac{2}{5}$)

4. மூன்று பகடைகளைச் சேர்த்து உருட்டும்போது, அப் பகடைகளின் பக்கங்களில் வரும் இலக்கங்களின் கூடுதல் முறையே 3, 4, 5, 18 என வருவதற்குரிய ஊக அளவைகள் யாவை ?

(விடை : $\frac{1}{216}, \frac{1}{72}, \frac{1}{36}, \frac{1}{216}$)

5. ஒரு நாணயத்தை அடுத்தடுத்து ஐந்து தடவைகள் சுண்டி எல்லாத் தடவைகளிலும் தலே வருவதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

$$\left(\text{விடை}, \frac{1}{32} \right)$$

உறுப்பு மாற்றுக் கோவைகளும் (Permutations), கூட்டுமாற்றுக் கோவைகளும் (Combinations)

A, B, C என மூன்று எழுத்துகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தடவையும் ஏதேனும் இரு எழுத்துகளே எடுத்தால், மொத்தமாக எத்தனை தடவைகள் உள்ளன என்பதனைக் கவனிப் போம். எடுக்கப்படும் இரு எழுத்துகள் AB, BC, CA, BA, CB, AC என்றிருக்கலாம். இங்கு ABயும், BAயும் தனித்தனித் தேர்வு களாகக் கருதப்படும். எனவே இட அமைப்புக்கும் முக்கியத்துவம் தந்தால், இரு எழுத்துக்களே எடுக்கும் வகைகள் = 6 ஆகும். இட அமைப்பிற்கு முக்கியத்துவம் தராவிட்டால் இரு எழுத்துகளே எடுக் கும் வகைகள் = 3 ஆகும்.

முதல் வகையாக எடுத்துவரும் எண்ணிக்கைகளே உறுப்பு மாற்றுக் கோவைகள் எனவும், இரண்டாவது வகையாக வரும் எண்ணிக்கைகளேக் கூட்டாக வரும் கோவைகள் (Combinations) எனவும் வரையறுக்கிறேம். இவைகளேக் குறியீட்டால் முறையே $3P_2$ எனவும், $3C_2$ எனவும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

'n' எழுத்துகளிலிருந்து ஏதேனும் 'r' எழுத்துகளே எடுக்கும் பொழுது இட அமைப்புக்கு முக்கியத்துவம் கொடுத்துவரும் எண் ணிக்கைகளே nP_r எனவும், இட அமைப்புக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக் காமலிருந்து வரும் எண்ணிக்கைகளே nC_r எனவும் குறிப்பிடுகிறேம். இவைகளின் மதிப்புகளே வரையறுக்கும் நியதிகளே முறையே,

$$nP_r = n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$nC_r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots r} \text{ ஆகும்.}$$

11. ஈருறுப்புப் பரவல்

(Binomial distribution)

ஒரு நாணயத்தை எடுத்துச் சுண்டுவதன்மூலம் ஊக அளவையின் கருத்தினை அறிந்தோமல்லவா ? நாணயத்தைச் சுண்டாமலேயே, இருவித நிகழ்ச்சிகளுள்ளன என்றும், அவைகள் ஒன்றையொன்று விலக்கிடும் தன்மை பெற்றன என்றும், ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்குச் சமவாய்ப்புகள் உள்ளன வென்றும் மனத்தின் கண் ஊகிக்க முடியும். மேலும், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனுமொன்று கட்டாயமாக நிகழ்வதால், மொத்த ஊக அளவை ஒன்றை, நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் சமமாகப் பிரித்து, ஒரு முயற்சியில் தலை வருவதற்குரிய ஊக அளவையை $\frac{1}{2}$ என்றும், பூ வருவதற்குரிய ஊக அளவையை $\frac{1}{2}$ என்றும் கொண்டோம்.

இப்போது இரு நாணயங்களைச் சுண்டுவதாகக் கொள்வோம். எத்தனை வித நிகழ்ச்சிகளை ஊகிக்கலாம் ? இரண்டிலும் ‘ தலையே ’ வரலாம் ; அல்லது இரண்டிலும் ‘ பூ ’ வே வரலாம்; அல்லது முதல் நாணயத்தில் தலையும், இரண்டாவதில் பூவும் அல்லது முதல் நாணயத்தில் பூவும், இரண்டாவதில் தலையும் ஆக 4 வகைகளில் நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படலாம். எனவே, இரண்டிலும் தலைகள் தென்படுவதை ஒரு நிகழ்ச்சியாகவும், இரண்டிலும் பூக்கள் தென்படுவதை ஒரு தனி நிகழ்ச்சியாகவும், ஒன்றில் தலை, மற்றொன்றில் பூ தென்படுவதை இரு தனி நிகழ்ச்சிகளாகவும் கருதலாம். இங்கு எந்த நாணயத்தில் தலை தென்படுகிறது எனவும், எதில் பூ தென்படுகிறது என்றும் வேற்றுமை பாராட்டுவதில்லையென்ற காரணத்தால், ஒன்றில் தலை, மற்றொன்றில் பூ ஆக வருவதற்குரிய நிகழ்ச்சிகள் இரண்டு என்று கொள்கிறோம். H என்பது ‘ தலை ’ வருதலையும், T என்பது ‘ பூ ’ வருதலையும் குறிப்பிட்டால், இந்நான்கு நிகழ்ச்சிகளையும் முறையே $\{HH\}$; $\{TT\}$; $\{HT, TH\}$ எனக் குறிப்பிடலாம். இவ்வித நான்கு நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கும்

சம வாய்ப்பு உளது. மேலும் ஒருவித நிகழ்ச்சி மற்ற மூன்றினையும் விலக்கும் தன்மையைப் பெற்றுள்ளது. எனவே

இரண்டிலும் 'தலை' வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{4} \quad \left[= \frac{1}{2^2}\right]$

இரண்டிலும் 'பூ' வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{4} \quad \left[= \frac{1}{2^2}\right]$

ஏதாவதொன்றில் 'தலை'யும் மற்றொன்றில் 'பூ'வுமாக வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{2}{4} \quad \left[= \frac{1}{2}\right]$

ஆதலால், இந்த நான்கு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை (ஊக அளவையின் கூட்டு நியதிப்படி)

$$= 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{2^2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + 1\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]^2$$

$= 1 =$ மொத்த ஊக அளவையாகும்.

ஏனெனில், நான்கு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒருவித நிகழ்ச்சி கட்டாயமாக நிகழ வேண்டும். இக் கோவையில் வரும் குணிதங்கள் 1, 2, 1 என்பன முறையே 'இரண்டிலும் தலை', 'ஒன்றில் தலை, மற்றொன்றில் பூ', 'இரண்டிலும் பூ' என்று வரும் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையை அறிவிப்பனவாக உள்ளன என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளல் வேண்டும்.

மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டுவதாகக் கொள்வோம். மொத்த நிகழ்ச்சிகளை ஒவ்வொன்றாக வரையறுத்துக் கணக்கிடுவோம். எனவே, வரக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் :

(i) மூன்றிலும் 'தலை' வருதல் : (HHH) ....(1)

(ii) ஏதாவது இரண்டில் தலை, மற்றதில் பூ வருதல்: (HHT, HTH, THH) ....(3)

(iii) ஏதாவதொன்றில் 'தலை' மற்ற இரண்டிலும் 'பூ' வருதல் : (HTT, THT, TTH) ....(3)

(iv) மூன்றிலும் 'பூ' வருதல்: (TTT) ....(1)

ஆக, $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ வித நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஏற்படுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் சமம். மேலும், ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதினால் மற்றவை வராமல் தவிர்க்கப்படுகின்றன.

எனவே,

மூன்றிலும் தலை வருதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{8} = 1 \cdot \frac{1}{2^3}$

இரண்டில் தலையும், மற்றதில் பூவும் வருதலுக்குரிய ஊக அளவை $= \frac{3}{8} = 3 \cdot \frac{1}{2^3}$

ஒன்றில் தலை, மற்ற இரண்டில் பூ வருதலுக்குரிய ஊக அளவை $= \frac{3}{8} = 3 \cdot \frac{1}{2^3}$

கடைசியாக, மூன்றிலும் தலை வருதலுக்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{8} = 1 \cdot \frac{1}{2^3}$.

எனவே, இவ்வித 8 நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை (கூட்டு விதிப்படி)

$$= 1 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3$$

$= 1 =$ மொத்த ஊக அளவை.

இக் கோவையில் வரும் குணிதங்கள் 1, 3, 3, 1 என்பன முறையே 'மூன்றிலும் தலை'; 'இரண்டில் தலை, ஒன்றில் பூ'; 'ஒன்றில் தலை, இரண்டில் பூ'; 'மூன்றிலும் பூ' என்று வரும் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையை எளிதாக அறிவிக்கின்றன.

4, 5, 6, ... n நாணயங்களைச் சுண்டிவரும் தனித்தனியான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கைகளைக் கணக்கிடும் நியதியை உங்களால் ஊகித்தறிய முடியுமா? இதில் பின்வரும் பட்டியல் உதவி புரியலாம்.

நாணயங்களின் எண்ணிக்கை.	தலை, பூ முதலியன வருதலுக்குரிய நிகழ்ச்சிகளின் அமைப்பு.	மொத்த நிகழ்ச்சிகள்.
1	1 1	2
2	1 2 1	$4 = 2^2$
3	1 3 3 1	$8 = 2^3$
4	1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
5	1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$
6	1 6 15 20 15 6 1	$64 = 2^6$
7	1 7 21 35 35 21 7 1	$128 = 2^7$
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$256 = 2^8$
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$512 = 2^9$
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	$1024 = 2^{10}$.
...	... ...	... ...
n	nC_0 nC_1 nC_2 ... ... nC_r ... ... nC_n.	... $= 2^n$.

(1) இங்கு தொடக்கத்திலிருந்து முன்னேக்கி எடுக்கும் எண்களும் இறுதியிலிருந்து பின்னேக்கி எடுக்கும் எண்களும் ஒரே மாதிரியாக அமைதலைக் கவனிக்கவும்.

(2) 4ஆவது வரிசையில் வரும் எண் 6-ஐ, 3ஆவது வரிசையில் வரும் 3, 3 என்ற எண்களின் கூடுதலாகும் என்பதையும் அறியவும்.

நாணயங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியாக ஊகித்து, மொத்த நிகழ்ச்சிகளைக் கணக்கிடுவது இயலாத காரியம். எனவே, மேலே குறிப்பிட்டுள்ள பட்டியல் 10 நாணயங்கள்வரை சுண்டி, தனித்தனியான நிகழ்ச்சிகள் வருவதற்குரிய எண்ணிக்கைகளை வரையறுக்க உதவி புரிகின்றது. இப் பட்டியலையும் நீட்டிக்கொண்டே போவதும் இயலாது. எனவே, தனித்தனி நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கைகளை வரையறுக்க, ஒரு சிறந்த நியதி அவசியம் எனத் தெளிவாகிறது. இதையும் எளிதான முறையின் வாயிலாக ஊகித்தறிவோம்.

இதற்காக நாணயத்தில் தலை வருவதை 'வெற்றி' என்றும், பூ வருதலைத் (அதாவது தலை வராமலிருத்தலை) 'தோல்வி' எனவும் கொள்வோம். எனவே, இரு நாணயங்களை எடுத்துச் சுண்டும் போது, தலைகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2 ஆக வருவதற்குரிய (இரண்டிற்குமேல் தலைகள் வருவதற்கில்லை) ஊக அளவைகள் முறையே $1 \cdot \frac{1}{2^2}$, $2 \cdot \frac{1}{2^2}$, $1 \cdot \frac{1}{2^2}$. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் முறையே

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ என்ற ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளே என அறியலாம். இங்கு 1, 2, 1 என்பன அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளில் வரும் குணிதங்களாகும். இவைகளை $2C_0$, $2C_1$, $2C_2$ எனவும் எழுதலாம்.

மூன்று நாணயங்களை யெடுத்துச் சுண்டும்போது, தலைகள் 0, 1, 2, 3 என வருவதற்குரிய ஊக அளவைகள் முறையே,

$1 \cdot \frac{1}{2^3}$, $3 \cdot \frac{1}{2^3}$, $3 \cdot \frac{1}{2^3}$, $1 \cdot \frac{1}{2^3}$ இவைகள் ஒவ்வொன்றும்

முறையே $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3$ என்ற 3 அடுக்குள்ள ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளே என அறியலாம். மேலும், இங்கு 1, 3, 3, 1 என்பன அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளில் வரும் குணிதங்களாகும். இக் குணிதங்களை $3C_0$, $3C_1$, $3C_2$, $3C_3$ எனவும் எழுதலாம்.

இவ்விதமே நான்கு நாணயங்களை எடுத்துச் சுண்டும்போது, தலைகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, 4 என வருவதற்குரிய ஊக அளவைகள் முறையே,

$1 \cdot \frac{1}{2^4}$, $4 \cdot \frac{1}{2^4}$, $6 \cdot \frac{1}{2^4}$, $4 \cdot \frac{1}{2^4}$, $1 \cdot \frac{1}{2^4}$. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் முறையே $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4$ என்ற 4 அடுக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளே என்றறியலாம். மேலும் இங்கு 1, 4, 6, 4, 1 என்பன அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளில் தென்படும் குணிதங்களாகும். இக் குணிதங்களை $4C_0$, $4C_1$, $4C_2$, $4C_3$, $4C_4$ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே, நாணயங்களின் எண்ணிக்கை 2, 3, 4 என்று வருமானல், அவைகளுக்குகந்த கோவைகள் ஒவ்வொன்றிலும் முறையே $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$ என்ற காரணிகள் வருவதை அறியலாம். மேலும் கோவைகளில் வரும் குணிதங்கள் முறையே $(2C_0, 2C_1, 2C_2)$ எனவும் ; $(3C_0, 3C_1, 3C_2, 3C_3)$ எனவும், $(4C_0, 4C_1, 4C_2, 4C_3, 4C_4)$ எனவும் வருவதையும் அறியலாம். ஆகவே n நாணயங்களை எடுத்துச் சுண்டும்போது (அல்லது ஒரே நாணயத்தை n தடவைகள் சுண்டும்போது) தலைகளின் எண்ணிக்கை $0, 1, 2 \ldots\ldots r, \ldots\ldots n$ என வருவதற்குரிய ஊக அளவைகள் முறையே $nC_0 \cdot \frac{1}{2^n}$, $nC_1 \cdot \frac{1}{2^n}$, $nC_2 \cdot \frac{1}{2^n} \ldots\ldots nC_r \cdot \frac{1}{2^n} \ldots \ldots\ldots nC_n \cdot \frac{1}{2^n}$ என்று ஊகித்தறியலாம். இவைகள் ஒவ்வொன்றும் முறையே $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$ என்ற n அடுக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகளே என்றும் அறியலாம்.

இங்கு ஒரு தடவை சுண்டும்போது தலை வருதலுக்குரிய (வெற்றிக்குரிய) ஊக அளவையை $\frac{1}{2}$ எனவும் ; பூ வருதலுக்குரிய (தோல்விக்குரிய) ஊக அளவையை $\frac{1}{2}$ எனவும் கொண்டுள்ளோம். மேலும் $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

இதற்குப் பதிலாக, ஒரு முயற்சியில் (trial) ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுத்துவதற்குரிய (வெற்றியடைவதற்குரிய) ஊக

அளவையை 'p' எனவும், இக் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படாமலிருத்த லுக்குரிய) ஊக அளவையை 'q' எனவும் கொண்டால், $(q+p) = 1$ என்று வரும். எனவே, 'n' முயற்சிகளில் அக் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி $0, 1, 2, \ldots\ldots r, \ldots\ldots n$ தடவைகள் ஏற்படுவதற்குரிய (வெற்றி யடைவதற்குரிய) ஊக அளவையை முறையே $(q+p)^n$ என்ற n அடுக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் (விரிவுபடுத்தி எழுதி) அடுத் தடுத்து வரும் கோவைகள் வரையறுக்கின்றன. இங்குத் தனித்தனி யாக வரும் ஊக அளவைகளைக் கொண்ட அமைப்பினையே ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Distribution) எனக் கூறுகிறோம்.

n முயற்சிகளை ஒரு பரிசோதனையாகக் கருதி, அப் பரிசோதனையை N தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்தால், ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி $0, 1, 2, \ldots\ldots r, \ldots\ldots n$ தடவைகள் ஏற்படுவதற்குரிய (வெற்றிக் குரிய) அலைவெண்களை முறையே $N(q+p)^n$ என்றும் விரிவில் அடுத் தடுத்து வரும் கோவைகள் வரையறுக்கின்றன.

எனவே, ஈருறுப்புப் பரவலின் அட்டவணை பின்வருமாறு:

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை.	வெற்றி வருதற்குரிய ஊக அளவை.	அலைவெண்.
0	$nC_0 \cdot q^n$	$N \cdot q^n$
1	$nC_1 q^{n-1} p$	$N \cdot nC_1 q^{n-1} p$
2	$nC_2 \cdot q^{n-2} p^2$	$N \cdot nC_2 q^{n-2} p^2$
...	...	...
r	$nC_r \cdot q^{n-r} p^r$	$C_r q^{n-r} p^r$
...	...	...
n	$nC_n q^{n-n} \cdot p^n = p^n$	$N.p^n$.
மொத்தம்	$(q+p)^n = 1$	$N.(q+p)^n = N$

இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் முறையே np, $\sqrt{npq}$ என்று கணக்கியலாக வரையறுக்க முடியும். இங்கு $nC_0 = 1$, $nC_1 = \frac{n}{1}$; $nC_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$;..................................;
$nC_r = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots r}$ என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டாக எட்டு நாணயங்களை ஒன்று சேர்த்துச் சுண்டும்போது, தலைகள் 0,1, 2,............8 என வருவதற்குரிய ஊக அளவைகளை, முறையே $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8$ என்ற எட்டடுக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகள் வரையறுக்கின்றன. எனவே, 8 நாணயங்களை ஒன்று சேர்த்துச் சுண்டுவதை 256 தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்தால், தலைகள் 0, 1, 2,......8 என வருவதற்குரிய அலைவெண்களை, முறையே 256 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8$-ன் விரிவில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகள் தீர்மானிக்கின்றன. இதற்கு ஒத்த பட்டியலைத் தந்திடுவோம்.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	தலைகள் வருவதற்குரிய ஊக அளவை	அலைவெண்கள்
0	$8C_0\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}$	$256\cdot\frac{1}{256} = 1$
1	$8C_1\cdot\frac{1}{2^8}=8\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 8\cdot\frac{1}{256} = 8$
2	$8C_2\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{}{256} = 28$
3	$8C_3\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 56\cdot\frac{1}{256} = 56$
4	$8C_4\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 70\cdot\frac{1}{256} = 70$
5	$8C_5\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 56\cdot\frac{1}{256} = 56$
6	$8C_6\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 28\cdot\frac{1}{256} = 28$
7	$8C_7\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 8\cdot\frac{1}{256} = 8$
8	$8C_8\cdot\frac{1}{2^8}=1\cdot\frac{1}{256}$	$256\cdot 1\cdot\frac{1}{256} = 1$
மொத்தம்	$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^8=1$	$256\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^8=256$

இங்கு $n = 8$, $N = 256$; $p = \frac{1}{2} = q$. எனவே,

கூட்டுச் சராசரி $= np = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$;

திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414$.

ஈருறுப்புப் பரவலை வரையறுக்க அப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும் (np), திட்ட விலக்கமும் $(\sqrt{npq})$ தெரிந்தால் போதுமானதே. எடுத்துக்காட்டாக கூட்டுச் சராசரி, மாற்றம் ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் முறையே 4, 3 ஆனால், ஈருறுப்புப் பரவலை அமைத்திடுக:

இங்கு $np = 4$. ...... (1)

மாற்றம் $=$ (திட்ட விலக்கம்)^2 $= npq = 3$. ...... (2)

$$\therefore q = \frac{npq}{np} = \frac{3}{4} \qquad \text{...... (3)}$$

$$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \qquad \text{...... (4)}$$

$$n = \frac{4}{p} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16 \qquad \text{...... (5)}$$

எனவே ஈருறுப்புப் பரவல் $= \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right]^{16}$

மாதிரிக் கணக்குகள்

(1) ஒரு மக்கட் தொகுதியில் 20% கல்வியறிவுள்ளவர்கள். 3,125 ஆய்வாளர்கள் ஒவ்வொருவரும் 5 நபரைப் பேட்டி கண்டு, அவர்களில் இரண்டு அல்லது அதற்குக் குறைவாகவும் கல்வியறிவுள்ளவர்கள் என எத்தனை ஆய்வாளர்கள் தெரிவிப்பார்கள் என்பதைக் கணக்கிடுக.

இங்கு $p =$ கல்வியறிவுள்ளவர்களுக்குரிய ஊகஅளவை $= \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

எனவே $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

$n = 5$; $N = 3{,}125$. எனவே,

ஈருறுப்புப் பரவல் $= 3125 \left[\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right]^5$

இரண்டும் அதற்குக் கீழும் கல்வி பயின்றவர்கள் எனத் தெரிவிக்கும் ஆய்வாளர்களின் எண்ணிக்கை = ஒருவருமே கல்வியறிவு இல்லாதவருக்குரிய எண்ணிக்கை + ஒருவர் மட்டுமே கல்வியறிவு உள்ளவருக்குரிய எண்ணிக்கை + இருவர் மட்டுமே கல்வியறிவு உள்ளவருக்குரிய எண்ணிக்கை.

$$= 3125 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 + 3125 \cdot 5C_1\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} + 3125 \cdot 5C_2\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

$$= 3125\left[\frac{4^5 + 5 \cdot 4^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 4^3}{5^5}\right]$$

$$= (256 + 320 + 640)$$

$$= 1,216$$

எனவே, 1216 ஆய்வாளர்கள் எழுதப்படிக்கத் தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை 2 அல்லது அதற்குக் குறைவானவர்கள் எனத் தெரிவிப்பார்கள் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது.

(2) ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் $p = \frac{1}{3}$, $n = 200$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 95% நிகழ்ச்சிகள் எவ்விரு முழு எண்களுக்கு இடையில் மதிப்புகளைப் பெறுமென்பதைக் காண்க :

100-க்கு 95 நிகழ்ச்சிகள் $(\bar{x} - 1{\cdot}96\,\sigma,\ \bar{x} + 1{\cdot}96\,\sigma)$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளைப் பெறும் என 5% ஊக அளவைக் கோட்பாட்டின்படி அறிவோம்.

எனவே, இங்கு $\bar{x}$ கூட்டுச் சராசரி $= np = 200 \times \frac{1}{3} = 66{\cdot}67$.

$$\sigma = \text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}.$$

எனவே பிரிவு இடை வெளியின் கீழ் எல்லை $= \bar{x} - 1{\cdot}96\,\sigma$

$= 66{\cdot}67 - 1{\cdot}96 \times \frac{20}{3}$

$= 66{\cdot}67 - 13{\cdot}06$

$= 53{\cdot}61$

$= 54$ (முழு எண்ணுக்குத் திருத்தமாக).

பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லை $= \bar{x} + 1{\cdot}96\,\sigma$

$= 66{\cdot}67 + 13{\cdot}06$

$= 79{\cdot}73$

$= 80$ (முழு எண்ணுக்குத் திருத்தமாக).

ஆகவே 95% நிகழ்ச்சிகளின் மதிப்புகள் 54-லிருந்து 80-க்குள் வரும் எனக் கூறலாம்.

(3) கூட்டுச் சராசரி, மாற்றம் அளவுகள் முறையே 5, $3\frac{3}{4}$ எனக் கொள்ளும் ஈருறுப்புப் பரவலை அமைத்திடுக :

இங்குக் கூட்டுச் சராசரி $= np = 5$ .... (1)

மாற்றம் $= npq = \frac{15}{4}$.............. (2)

$\therefore\ q = \frac{npq}{np} = \frac{15}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$ .... (3)

$\therefore\ p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .... (4)

$n = \frac{5}{p} = 5 \times \frac{1}{\frac{1}{4}} = 20$ .... (5)

எனவே ஈருறுப்புப் பரவல் $= \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right]^{20}$.

(4) 5 பகடைகளை ஒருமிக்க, 96 தடவைகள் உருட்டப்பட்டன. பகடைகளில் 4, 5, 6 என்ற இலக்கங்கள் குறிப்பிட்டுள்ள பக்கங்கள் வருமாஞல் அவைகளை வெற்றியான நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொண்டு, ஈருறுப்புப் பரவலை அமைத்திடுக. கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களையும் கண்டிடுக.

இங்குப் பகடைகளில் 4 அல்லது 5 அல்லது 6 எனக் குறிப்பிட்டுள்ள இலக்கங்கள் வருவதை வெற்றி எனக் கொள்வதால்

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \text{ எனவே } q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

இங்கு $n = 5$, $N = 96$. ஆதலால்,

$$\text{ஈருறுப்புப் பரவல்} = N\,(q+p)^n$$

$$= 96\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^5$$

$$= 96\left\{\frac{1}{2^5} + 5\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{5}{1}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5}\right\}$$

$$= 96\left\{\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}\right\}$$

$$= [\,3 + 15 + 30 + 15 + 3\,]$$

கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் முறையே
3, 15, 30, 30, 15, 3 (= 96).

பயிற்சி

1. ஒரு செடிப் பண்ணை வைத்திருப்பவர் தன்னிடமுள்ள விதைகளைப் பொட்டலங்களாக வைத்துள்ளார். பொட்டலங்களிலுள்ள விதைகளில் மூன்றில் ஒரு பகுதி சிவப்பு நிற மலர்களைக் கொடுக்குமென்றும், மற்றவை வெண்மை நிற மலர்களைக் கொடுக்குமென்றும் அனுபவத்தில் கண்டுள்ளார். ஒரு பொட்டலத்திலிருந்து ஏழு விதைகள் எடுக்கப்பட்டு விதைக்கப்பட்டன. அவைகளில் பூக்கும் மலர்களில்,

(*a*) ஒன்றிலும் சிவப்பு நிறமில்லாமல் வருவது

(*b*) ஒன்றில் மட்டும் சிவப்பு நிறம் வருவது

(*c*) ஒன்றிலும் வெண்மை நிறமில்லாமல் வருவது ஆகியவற்றிற்குரிய ஊக அளவைகளைக் கணக்கிடுக.

[விடை: (*a*) $\frac{128}{2187}$; (*b*) $\frac{448}{2187}$; (*c*) $\frac{1}{2187}$]

2. ஒரு நகரத்திலுள்ள தொலைபேசிகளில் (telephones) 25%, 11 மணியிலிருந்து 12 மணி வரை பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. இவற்றில் ஏதாவது ஒன்பது தொலைபேசிகளை இக் குறிப்பிட்ட நேரத்தில் எடுத்து அவைகளைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட நிகழ்ச்சிகள் வருவதற்குரிய ஊக அளவையைக் கணக்கிடுக :

(*a*) எல்லாத் தொலைபேசிகளும் தடையற்றிருத்தல்

(*b*) ஒன்று மட்டும் ஈடுபட்டிருத்தல்

(*c*) இரண்டும் அதற்கு மேற்பட்ட தொலைபேசிகள் ஈடுபட்டிருத்தல்

[விடை : (*a*) $\left(\frac{1}{4}\right)^9$; (*b*) $9\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^8$;

(*c*) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^9-9\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^8$]

3. மூன்று குழந்தைகளைக் கொண்ட 300 குடும்பங்களை விசாரித்ததில், பின்வரும் தகவல்கள் கிடைத்தன.

இங்கு x என்பது குடும்பத்திலுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையையும், f என்பது அதற்கேற்ப அமையும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கிறது.

x :	0	1	2	3	மொத்தம்
f :	44	123	103	30	300

இக் குடும்பங்களில் உள்ள ஆண், பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு, ஆண், பெண் குழந்தைகள் பிறப்பது 1 : 1 விகிதத்தை யொட்டியுள்ளதா எனப் பரிசோதித்திடுக.

12. இயல்நிலைப் பரவல்

(Normal Distribution)

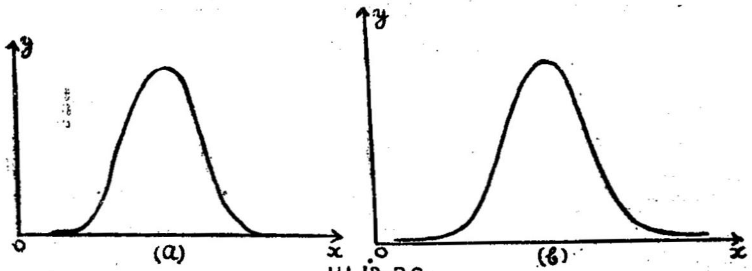
பரிசோதனைமூலம் கிட்டிய அளவின் விவரங்களை, அலைவெண் பரவலாக அமைத்தலை முன்பே முதல் அதிகாரத்தில் குறிப்பிட்டோம். இப் பரவல், கணக்கியலுக்கு ஏற்ப ஓர் அலைவெண் வளைகோடாக மாற்றப்படுகிறது. இவ்வாறு அமைக்கப்படும் பரவலின் உருவ அமைப்பையே இயல்நிலைப் பரவல் அமைப்பு எனக் கொள்கிறோம். இயல்நிலைப் பரவல் வளைகோட்டின் கருத்தை முதன்முதலாக விரிவு படுத்தியவர், 'டி மாவாவ்ரே' (De Moivre) என்பவர். இவர் சூதாட்டத்தில் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் வாய்ப்புகளை ஆராயும் பொழுது, நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் ஓர் ஒழுங்கு விதியைக் கடைப்பிடித்தே நடைபெறுகிறது என்ற தத்துவத்தை விளக்கியுள்ளார். இந் நியதியின் கருத்தினைப்பற்றி, 'காஸ்' (Gauss), 'லாப்லேஸ்' (Laplace) என்பவர்களும் தனித்தனியே கூறியுள்ளனர்.

வானநூல் ஆராய்ச்சியில் கண்டறிந்த விவரங்களிலுள்ள பிழைகளுக்கு விளக்கம் தெரிவித்தலில், இந் நியதி அடிப்படையாகவுள்ள காரணத்தால் இந் நியதியைப் 'பிழைகளின் விதி' (Law of errors) என்றும் கூறப்படுகிறது. இங்குப் பிழை என்பது கண்டறிந்த மதிப்பிற்கும், கணக்கியலாக வரும் மதிப்பிற்கும் உள்ள வேற்றுமையைக் குறிக்கிறது. இந் நியதி புள்ளியியல் ஆராய்ச்சியில் பிழைகளை விளக்குவதிலும் முக்கிய இடத்தினைப் பெற்றுள்ளது. மேலும் இயல்நிலை வளைகோடு, சமூக வாழ்க்கை நூல் (Sociology), உயிர்நூல் (Biology) ஆகியவற்றின் விவரங்களை ஒழுங்குபடுத்திக் கூறுவதிலும் பெரிதும் உதவியாகவுள்ளது. இவ் வளைகோட்டை ஈருறுப்புப் பரவலின் இறுதிநிலை அமைப்பாகவும் கொள்ளலாம்.

அலைவெண் பரவல் அட்டவணைகளில், அலைவெண்கள் ஆரம்பத்தில் சிறிய மதிப்பினைப் பெற்று, பிறகு வரவர அதிகரித்து, ஒரு

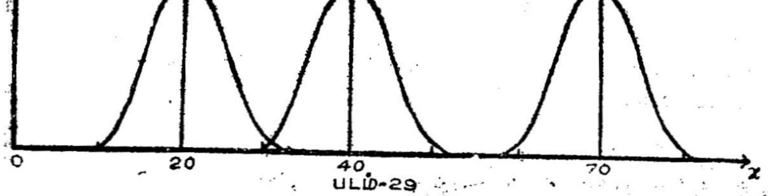
குறிப்பிட்ட (நடுமையத்தில்) பிரிவில் பெருமத்தை அடைந்து, அதன் பின் குறைந்துகொண்டே வருமானல், அப்பரவலுக்குரிய அலைவெண் வளைகோடு, இயல்நிலை வளைகோட்டை ஒத்திருக்கும்.

நடைமுறையில் வரையப்படும் அலைவெண் வளைகோடு ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஆரம்பித்து, ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் முடிவடைகிறது. (படம் 28-ல் a). ஆனால், இயல்நிலை வளைகோடு கணக்கியலாக அமைக்கப்படுவதால், இதன் இரு கடைக்கோடி முனைகள், x அச்சைத் தொடாமலேயே வரையப்படுகிறது(படம் 28-ல் b).



படம்-28.

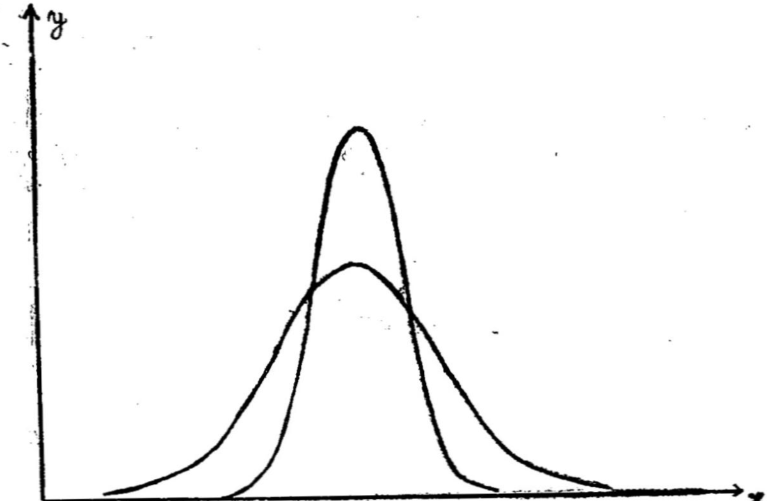
கண்டறிந்த விவரங்களைச் சுருக்கமாக ஒருசில எளிய அலகுகளால் அறிவிப்பதே புள்ளியியலின் நோக்கங்களில் ஒன்றாகும். இயல்நிலை வளைகோட்டை நிருபணம் செய்வதில் கூட்டுச் சராசரியும் ($\bar{x}$), திட்ட விலக்கமும் (σ) அலகுகளாகத் துணைபுரிகின்றன. பொதுவாக, பரவலின் அமைப்பெல்லாம் சமச்சீராகவும் (symmetrical), ஒரு முகடுள்ளதாகவும் இருக்குமாதலால், இவ்விரு அலகுகளைக் கொண்டே, பரவலின் அமைப்பை மனத்தில் உருவாக்கிக் கொள்ளலாம்.



படம்-29

ஒழுங்கு நியதிக்குக் கட்டுப்பட்டு வரும் பரவல்களனைத்தும் ஒரே மாதிரியான அமைப்பைப் பெற்றவை. அவைகளில் குறிப்பாக, கூட்டுச் சராசரியும் ($\bar{x}$), திட்டவிலக்கமும் (σ) மாறுபட்டிருந்தாலும், அவைகளின் உருவ அமைப்பு ஒருமித்தே காணப்படும்.

29ஆவது படத்தில் காணப்படுகின்ற அலைவெண்கள் மூன்றும், கூட்டுச் சராசரியில் வெவ்வேறான மதிப்பைப் பெற்றனவாகவும், ஒரே திட்டவிலக்கத்தை உடையனவாகவும் உள்ளன. இவைகள் மூன்றும் வடிவத்திலும் ஒன்றாகவே காணப்படுகின்றன. ஆனால், இவைகள் இட அமைப்பில் (location) மாறுபட்டுள்ளன.



படம்-30

30ஆவது படம் கூட்டுச் சராசரிகளில் ஒன்றாகவும், திட்ட விலக்கங்களில் வெவ்வேறாகவும் உள்ள பரவல்களின் அமைப்பைக் காட்டுகிறது. இவ் வளைகோடுகள் உயரத்தில் ஏன் மாறுபட்டுள்ளன வென்றால், வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பை, மொத்த ஊக அளவு (Total Probability) மூலம் தெரிவிப்பதற்காக ஒன்று என்று கொள்கிறோம். எனவே, வளைகோட்டின் அடித்தளம் குறையக் குறைய உயரம் அதிகரிக்க நேரிடுகிறது. இப் பரவல்களின் அமைப்பை உடனடியாகவே ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியாது. ஏனெனில், ஒவ்வொரு பரவலும், அதன் கூட்டுச் சராசரியாலும், திட்ட விலக்கத்தாலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.

$\bar{x}$, σ என்பன அலகுகோல்களால் பாதிக்கப்படாமல் இருக்க, x மாறியை, $t=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டு தரப் படுத்தப்பட்ட t மாறியாக மாற்றவேண்டும். அப்பொழுது ஒவ்வொரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும் 0 (zero) ஆகவும், திட்ட விலக்கம் ஒன்றாகவும் ஆகிறது.

x மாறியின் ஒழுங்கு அலைவுப்பரவல் வளைகோடு

$$y=\frac{N}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$ என்ற சமன்பாட்டினால்

வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு N மொத்த அலைவெண்ணையும், $\bar{x}$, σ முறையே பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றையும் குறிப்பிடுகின்றன. இச்சமன்பாட்டினைத் தரப்படுத்திய t மாறியின் வாயிலாகவும் வரையறுக்கலாம். எனவே,

$$\bar{y}=\frac{N}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$$

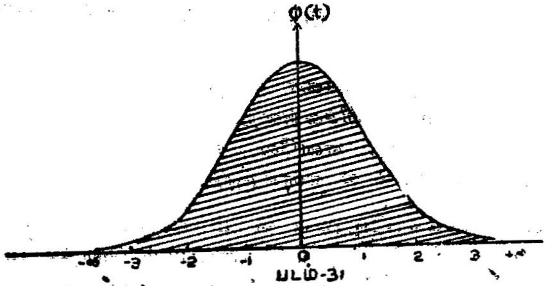
$$=\frac{N}{\sigma}\,\phi(t), \qquad \phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$$ என்ற

நியதியாலும் குறிப்பிடலாம். இங்கு,

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$$ என்ற சமன்பாடு தரப்

படுத்தப்பட்ட t மாறியின் இயல்நிலை ஊக அளவை, வளைகோடாகும் (Normal Probability Curve). இவ்வளைகோட்டிற்கும் t அச்சுக்கும் இடையிலமையும் பரப்பளவு மொத்த ஊக அளவை 1-க்குச் சமமாக வரும்படி, சமன்பாட்டினை அமைப்பதால் இவ்வளைகோட்டை இயல்நிலை ஊக அளவை வளைகோடு (Normal Probability Curve) எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது.

t மாறி, ‘$-\infty$’ லிருந்து ‘$+\infty$’ க்குள் எந்த மதிப்பினையும் ஏற்குமானால், அதன் ஊக அளவை ஒன்றாகிறது. இதனை $P(-\infty \leqslant t \leqslant +\infty) = 1$ என்ற கணக்கியல் அறிகுறியாலும் தெரிவிக்கலாம்.



படம்-3

மேலும், x மாறியின் இயல்நிலை வளைகோடு, x அச்சுடன் உண்டாக்கும் பரப்பளவு மொத்த அலைவெண்ணுக்குச் சமம் என்பதையும் ஊகத்தறியலாம்.

தரப்படுத்தப்பட்ட ‘t’ மாறியின் மதிப்புகளுக்குத் தகுந்த $\phi(t)$ மதிப்புகளின் வாயிலாக நிலைக்கோட்டின் நீளங்களைத் தெரிவிக்கும் சிறப்புப் பட்டியலும், t ஏற்கும் ஏதாவது இரு மதிப்புகளுக்கு இடையிலமையும் பரப்பளவை ஊக அளவையின் வழியிலாகக் குறிக்கும் ‘$\int \phi(t)\, dt$’ என்ற சிறப்புப் பட்டியலும் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளைக் குறிக்கும் பட்டியல் பின்வருமாறு :

t	$\phi(t)$	$\int_0^t \phi(t)\, dt.$

இப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி x மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளுக்கு உகந்த அலைவெண்களையும், $\bar{x}$–ன் இரு மதிப்புகளுக்கிடையில் வரும் அலைவெண்களின் (மொத்த) எண்ணிக்கையையும் கணக்கிட முடியும்.

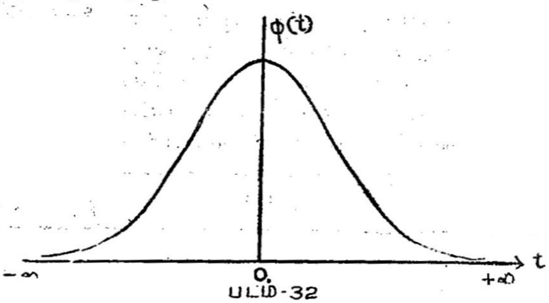
t மாறியின் பரவலமைப்பின் தோற்றம் சமச்சீராக (symmetrical) இருப்பதால் x மாறியின் பரவலும் சமச்சீராக உள்ளதே. ஆனால், $y=\frac{N}{\sigma}\phi(t)$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் (i) மொத்த அலைவெண்

(N) நிலைக்கோடுகளை இடம்பெயர்க்கச் (shift) செய்யுமேயன்றி, பரவலின் தோற்றத்தை (உருவத்தை)ப் பாதிப்பதில்லை என்றும், (ii) திட்டவிலக்கம் (σ) தோற்றத்தை (உருவத்தை)ப் பாதிக்கும் என்றும், (iii) திட்டவிலக்கம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க, பரவலின் அமைப்பு x அச்சில் $\bar{x}$-க்கு இருபுறங்களிலும் ஒரே சீராக விரிவடையும் எனவும் அறியலாம்.

$\phi(t)$ வளைகோடு t அச்சை எங்கும் தொடுவதில்லை. எனவே, இயல்நிலைப் பரவலின் வீச்சு நிறை, எல்லையற்றதாகக் (unlimited one) கருதப்படுகிறது. எனவே, வீச்சின் இறுதி எல்லைகளைக் கணக்கியலில் $-\infty$, $+\infty$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

இயல்நிலை வளைகோட்டினுள் வரும் பரப்புகளைக் கணக்கிடல்

இயல்நிலை வளைகோட்டினுள் அடைபடும் மொத்த பரப்பளவை, மொத்த ஊக அளவை ஒன்றுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு இயல்நிலை வளைகோடு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்று முன்பே அறிவோம். இவ் வளைகோடு சமச்சீராக உள்ளதால், $t = 0$ ஆக வரும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக்கோடு, மொத்தப் பரப்பளவை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது.



படம்-32

t மாறி $(-\infty, +\infty)$ இடைவெளியில் எந்த மதிப்பையும் ஏற்பதாகில், இதன் ஊக அளவையை $P(-\infty \leqslant t \leqslant +\infty)$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம். எனவே,

$P(-\infty \leqslant t \leqslant +\infty) = (-\infty, +\infty)$ பிரிவுக்குள் வரும் பரப்

பளவு $= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,dt$

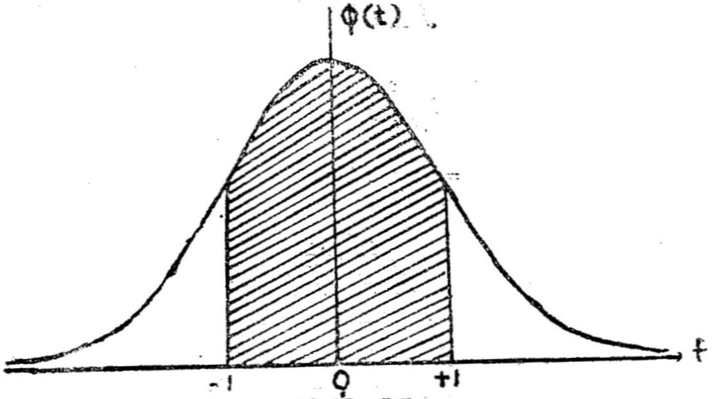
$= 2 \int_{0}^{\infty} \phi(t)\,dt$

$= 2 \times 0{\cdot}5$

$= 1$ என அறிகிறோம்.

$(-1, +1)$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் t மாறி மதிப்புகளை ஏற்குமானால் இதன் ஊக அளவையை $P(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ என்ற குறியீட்டால் தெரிவிப்பது வழக்கம். ஆகவே,

$P(-1 \leqslant t \leqslant 1) = (-1, +1)$ பிரிவில் வரும் பரப்பளவு.



படம்-33

$$P(-1 \leqslant t \leqslant 1) = \int_{-1}^{+1} \phi(t)dt = 2\int_0^1 \phi(t)\, dt$$

$= 2 \times \cdot 3413$ [பட்டியலில் $t = 1$க்கு உகந்த $\int_0^t \phi(t)\, dt$-யின் மதிப்பு $= \cdot 3413$]

$= \cdot 6826$

அதாவது மொத்த நிகழ்ச்சிகளில் 68%க்கு மேல் நிகழ்ச்சிகள் $(-1, +1)$ இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன. $t = -1$ என்றால்,

$\frac{x-\bar{x}}{\sigma} = -1 \quad \therefore \quad x = \bar{x} - \sigma$ என்று ஆகும். $t = 1$ என்றால்

$\frac{x-\bar{x}}{\sigma} = 1 \therefore x = \bar{x} + \sigma$ என்று ஆகும்.

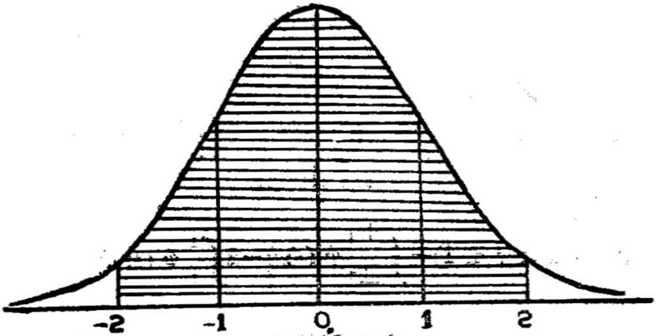
எனவே, மொத்த நிகழ்ச்சிகளில் 68%-க்கு மேல் நிகழ்ச்சிகள் $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன என அறிகிறோம். இதேபோல்,

$P(-2 \leqslant t \leqslant 2)$ = (−2, +2) பிரிவில் உண்டாகும் பரப்பளவு.

$$= \int_{-2}^{+2} \phi(t)\, dt$$

$$= 2\int_{0}^{2} \phi(t)\, dt$$

$$= 2 \times \cdot 47725$$
$$= 0 \cdot 9545$$



படம்-34

அதாவது, மொத்த நிகழ்ச்சிகளில் 95%-க்கு மேல், நிகழ்ச்சிகள் (− 2, + 2) இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன.

எனவே, மொத்த நிகழ்ச்சிகளில் 95%-க்கு மேல் நிகழ்ச்சிகள் $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன என்றறியலாம்.

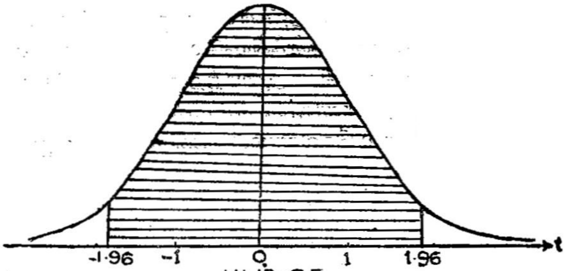
$P(-1 \cdot 96 \leqslant t \leqslant 1 \cdot 96) =$ {(−1·96, + 1·96) பிரிவு இடைவெளிக்குள் அமையும் பரப்பளவு.

$$= \int_{-1 \cdot 96}^{+1 \cdot 96} \phi(t)\, dt$$

$$= 2\int_{0}^{1 \cdot 96} \phi(t)\, dt$$

$$= 2 \times 0 \cdot 475$$
$$= 0 \cdot 95$$

அதாவது, மொத்த நிகழ்ச்சிகளில் 95% நிகழ்ச்சிகள் (— 1·96, + 1·96) இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன.



படம்-35

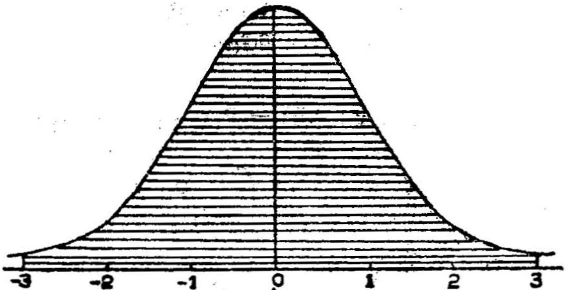
எனவே, மொத்த நிகழ்ச்சிகளில் 95% நிகழ்ச்சிகள் $(\bar{x}-1\cdot96\sigma,\ \bar{x}+1\cdot96\sigma)$ இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன.

$P(-3 \leqslant t \leqslant 3) = (-3, 3)$ பிரிவு இடைவெளிக்குள் அமையும் பரப்பளவு

$$= \int_{-3}^{+3} \phi\ (t)\, dt$$

$$= 2 \int_{0}^{3} \phi\ (t)\, dt$$

$$= 2 \times 0\cdot49865$$
$$= 0\cdot9973$$

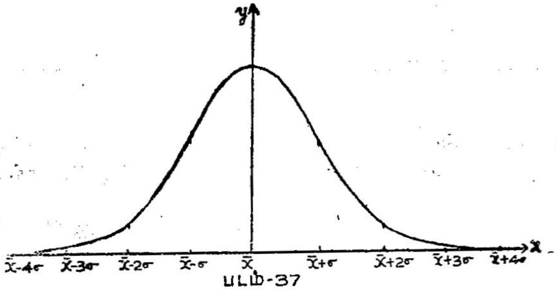


படம்-36

அதாவது 99%-க்கு மேல் நிகழ்ச்சிகள் (— 3, + 3) பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளைப் பெறமுடியும்.

எனவே, 99%-க்கு மேல் நிகழ்ச்சிகள் ($\bar{x} - 3\sigma$, $\bar{x} + 3\sigma$) பிரிவு இடைவெளியில் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன.

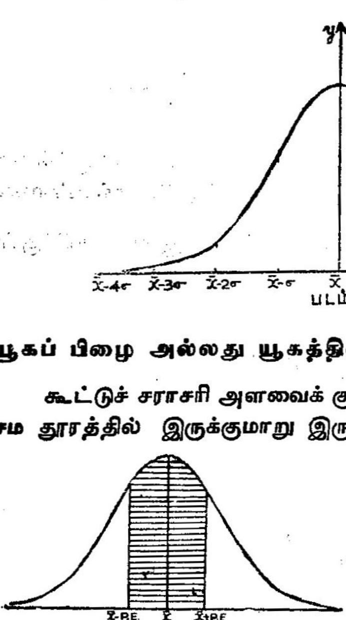
இப்பிரிவு இடைவெளிக்கு அப்பால் வரும் பரப்பளவு 1%-க்குக் கீழ் வருகிறது. ஆதலால், கணக்கியலில் இயல்நிலை வளைகோடு x-அச்சுக்கு மிகமிக நெருங்கி அமைந்திருந்தபோதிலும், நடைமுறையில், $\bar{x}$-க்கு இருபுறங்களிலும், திட்டவிலக்கத்தின் 3 அல்லது 4 மடங்கு அளவுக்கு அப்பால் செல்லாமல் வரையப்படுகிறது.



படம்-37

யூகப் பிழை அல்லது யூகத்தின் பிழை (Probable Error)

கூட்டுச் சராசரி அளவைக் குறிக்கும் புள்ளிக்கு இரு புறங்களில் சம தூரத்தில் இருக்குமாறு இரு புள்ளிகளை எடுத்து, இப் புள்ளிகளுக்கு இடையில் வரும் பரப்பளவு 50% ஆக ஏற்படுமானால், இப் புள்ளிகளைக் குறிக்கும் மதிப்புகளுக்கும், கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேற்றுமையை யூகத்தின் பிழை (P.E.) என வரையறுக்கிறோம்.



படம்-38

எனவே,

$$P\,(\bar{x} - P.E \leqslant x \leqslant \bar{x} + P.E) = P\,(-t_1 \leqslant t \leqslant t_1)$$

$$= \int_{-t_1}^{t_1} \phi\,(t)\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{t_1} \phi\,(t)\,dt$$

$$= \cdot 5$$

அதாவது $\int_{0}^{t_1} \phi(t) = \cdot 25$

பட்டியலில் ·25 பரப்பளவிற்கு ஏற்ற t மதிப்பு

$$t_1 = \cdot 6745$$

$$= \frac{2}{3} \text{ (தோராயமாக)}$$

எனவே, $t = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma} = \dfrac{2}{3}$.

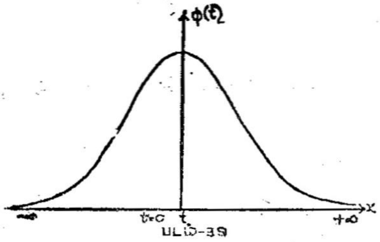
$$\therefore \quad x-\bar{x} = \frac{2}{3}\sigma$$

யூகப்பிழை $= \left| x-\bar{x} \right| = \dfrac{2}{3}\sigma$.

இயல்நிலை வளைகோட்டின் தனிப்பட்ட (எளிதான) சில சிறப்புக் குணங்கள்

1. இயல்நிலை வளைகோட்டின் சமன்பாடு $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_2/2}$ ஆகும்.

2. பரவல் $t=0$-ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியே வரையும் நிலைக்கோட்டின் இருபுறங்களிலும் ஒரே சீரான பரவலைப் பெற்றுள்ளது. எனவே கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவை $t = 0$ என்னுமிடத்தில் ஒன்றுபடுகின்றன.



3. இயல்நிலைப் பரவலின் வீச்சு எல்லைகள் $-\infty$, $+\infty$ ஆகும். அதாவது வளைகோடு t அச்சை $-\infty$ யிலும், $+\infty$ யிலும்தான் இறுதியாகத் தொடுகிறது.

4. $t = 0$-ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியே வரையப்படும் நிலைக்கோட்டின் நீளமே மிகப் பெரிய நீளம். இதன் நீளம் $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ என்றாகிறது.

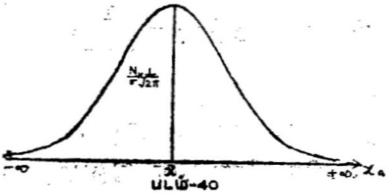
5. $t = -1, t = +1$ என்னும் புள்ளிகளின் வழியே வரையப் படும் நிலைக்கோடுகள், வளைகோட்டை வெட்டுமிடங்களில் குவிவுப் பகுதி, குழிவுப்பகுதியாக மாறுவதைக் காணலாம். வெட்டும் இரு புள்ளிகளை, குவிவைக் குழிவாக மாற்றும் புள்ளிகள் (points of inflexion) எனக் கூறுகிறோம்.

x மாறியின் ஒழுங்கு அலைவெண் வளைகோட்டின் சில சிறந்த பண்புகள்

1. இவ் வளைகோடு $y = \frac{N}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ என்ற சமன்பாட்டினுல் வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு,

N, $\bar{x}$, σ என்பன முறையே பரவலின் மொத்த அலைவெண், கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றினைக் குறிப்பிடுகின்றன.

2. $x = \bar{x}$-ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் நிலைக்கோட்டிற்கு இருபுறங்களிலும் ஒரே சீராகச் சரிந்துகொண்டே வரும். இறுதியில் x அச்சுக்கு மிக மிக நெருங்கிய அமைப்பினை அடையும். ஆகவே இடைநிலை, முகடு ஆகிய அளவைகள் கூட்டுச் சராசரியுடன் ஒன்றுபடுகின்றன.



படம்-40

3. $x = \bar{x}$ என்னுமிடத்தில் நிலைக்கோடுகளின் உயரம் பெருமத்தைப் பெறுகிறது. எனவே,

$$\text{நிலைக்கோட்டின் பெருமம்} = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

4. $x = \bar{x} - \sigma$, $x = \bar{x} + \sigma$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாக நிலைக்கோடுகளை வரைந்து, அவ்வுகள் ஒழுங்கு வளைகோட்டை வெட்டுமிடங்களில் குவிவுப்பகுதி, குழிவுப் பகுதியாக மாறுவதைக் காணலாம். இவ்விரு இடங்களையும் குவிவைக் குழிவாக மாற்றும் இடங்கள் (புள்ளிகள்) (Points of Inflexion) எனக் கூறுவது வழக்கம். அதாவது, இப் புள்ளிகளில் வளைகோட்டுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சுழற்சிகள் இடமிருந்து வலமாக மாறுகின்றன எனவும் கூறலாம்.

5. இப் பரவலின் சராசரி விலக்கத்தைத் (Mean Deviation) தோராயமாக $\frac{4}{5}\sigma$ எனவும், கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation), ஊகத்தின் பிழை இவைகளை ·6745σ அல்லது தோராயமாக $\frac{2}{3}\sigma$ எனவும் கொள்ளலாம்.

6. வளைகோடு x அச்சுடன் உண்டாக்கும் பரப்பளவு, மொத்த அலைவெண், N க்குச் சமமாகும்.

இயல்நிலை வளைகோட்டைச் செயல்முறையில் பொருத்துதல்

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் ஓர் அலைவெண் பரவலுக்கு உகந்த இயல்நிலை வளைகோட்டை, கணக்கியலாக எவ்வாறு பொருத்துவது ?

செயல் முறையில் கடைபிடிக்கும் வழியினை வரையறுப்போம்.

முதலாவதாக: ϕ (t) அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடல்.

1. x மாறியின் அலைவெண் பரவல் (x_r, f_r), $r = 1, 2, \ldots\ldots n$, எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு x, f என்பன பிரிவு இடைவெளிகளின் நடு மதிப்புகளையும், பிரிவு அலைவெண்களையும் குறிக்கின்றன.

2. இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் $(\bar{x})$, திட்டவிலக்கத்தையும் (σ) கணக்கிடவும்.

3. இவைகளைக் கொண்டு

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

என்ற சமன்பாட்டை அமைத்திடவும். இங்கு N மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கிறது. இச் சமன்பாடே பரவலுக்கு ஏற்ற இயல்நிலை வளைகோட்டை வரையறுக்கிறது. பின்,

இதனைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை (expected frequency) நிர்ணயிப்பது ? இதற்காக,

4. $t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம், [x-ன் மதிப்புகளுக்கும், $\bar{x}$ -ன் மதிப்பிற்கும் உள்ள வேற்றுமையை, திட்ட விலக்கத்தால் (σ) வகுத்து] x-ன் மதிப்புகளை t ஏற்கும் மதிப்புகளாக மாற்றவும். அப்பொழுது, இயல்நிலை வளைகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{N}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

$= \frac{N}{\sigma}\phi(t)$ என்றாகிறது. இங்கு t ஏற்கும் மதிப்புகளுக்குத் தக்க $\phi(t)$ மதிப்புகளை t அட்டவணையிலிருந்து கண்டிடவும். இவைகள் நிலைக்கோட்டின் நீளங்களை ஊக அளவையில் தெரிவிக்கின்றன. $\phi(t)$ மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் $\frac{N}{\sigma}$ ஆல் பெருக்குக. பிறகு வந்த மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் பிரிவு இடைவெளி நீளத்தால் (class - interval) பெருக்கவும். [ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அலைவெண்கள் நடுமையத்தில் வருவதாகக் கொள்ளுவதால் இறுதியாக வரும் $\frac{N}{\sigma}\ \phi\ (t)$ மதிப்புகளை, பிரிவு இடைவெளி நீளத்தால் பெருக்குதல் வேண்டும்.] அவைகளே கணக்கியலாக வரக்கூடிய பிரிவு அலைவெண்களின் மதிப்புகளாகும்.

5. இவ் வழிகளைப் பயன்படுத்தி, கீழ்வரும் அட்டவணையைத் தயாரித்தல் வேண்டும்.

x	f	$x-\bar{x}$	$t=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$	$\phi\ (t)$	$y=\frac{n}{\sigma}\phi\ (t)$	$y\times c$
மொத்தம்	N	...	...	...	...	...

இரண்டாவதாக $\int_{-\infty}^{t} \phi\ (t)\, dt$ அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடல் :

(1) முதலில் கொடுத்திருக்கும் அலைவெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $(\bar{x})$, திட்டவிலக்கம் (σ) இவைகளைக் கணக்கிடுக.

(2) பிரிவு இடைவெளிகளின் மேல்வரம்புகளுக்குக் கீழ் மதிப்புகளை ஏற்கும் குவிவு அலைவெண் பரவல் அட்டவணையை அமைத்திடுக.

(3) மேல் வரம்புகளை $t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ என்ற சமன்பாட்டினால் தரப்படுத்தப்பட்ட மாறியின் அளவைகளாக மாற்றிடுக.

(4) t ஏற்கும் மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற $\int_{-\infty}^{t} \phi(t)\, dt$ மதிப்புகளை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க. [இவைகள் குவிவு அலைவெண்களை ஊக அளவைக்கேற்ற பரப்புகளின் வாயிலாக அறிவிக்கின்றன.]

(5) மேல்வரும் பரப்புகளை, மொத்த அலைவெண் N ஆல் பெருக்கி வரும் எண் மதிப்புகளே, கணக்கியலாக வரும் குவிவு அலைவெண்கள்.

(6) இக் குவிவு அலைவெண்களை, பிரிவு அலைவெண்களாக மாற்றி அமைத்திடுக.

(7) இதனைப் பின்வரும் அட்டவணை செவ்வனே விளக்கிடும்.

மேல் வரம்புகள். x	குவிவு அலைவெண்கள்.	$x-\bar{x}$	$t=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$	$A=\int_{-\infty}^{t}\phi(t)\,dt$	கணக்கியலாக வரும் குவிவு அலைவெண்கள் N.A.	கணக்கியலாக வரும் அலைவெண்கள். f_e	பரவலில் கண்ட அலைவெண்கள் f_o
மொத்தம்							N

இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவம் (Normal Distribution)

ஈருறுப்புப் பரவலின் முயற்சிகளின் (trials) எண்ணிக்கை அதிகரிக்க இறுதியான அமைப்பே இயல்நிலைப் பரவலாகும் என்று

முன்பே குறிப்பிட்டுள்ளோம். முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 300க்குமேல் வரும்பொழுது, உண்மையாகவே நிகழ்ந்த நிகழ்ச்சிகளின் அலைவெண் செவ்வகப் படத்துடன், கணக்கியலாக நிறுவனம் செய்த அலைவெண் வளைகோட்டை வரைந்து ஆராயுங்கால் அவைகள் இரண்டும் அமைப்பில் செவ்வனே பொருந்தியிருப்பது தெளிவாகும். எனவே, ஈருறுப்புப் பரவலமைப்பால் ஒரு நிகழ்ச்சி குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கைக்கு மேல் வருவதின் ஊக அளவையைக் கணக்கிட, அதற்கேற்ப இயல்நிலைப் பரவலமைப்பின் வாயிலாகக் கணக்கிடலாம். ஒரே சீரான இன மக்களின் உயரம், எடை முதலிய தொடர் மாறிகளின் அலைவெண் பரவல் கூடியமட்டில் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கும். ஆனால், தனித்த (discrete) மாறிகளின் அலைவுப் பரவல்களை இயல்நிலைப் பரவல்களாக முற்றிலும் அமைத்தல் இயலாது. ஏனெனில், தனித்த மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகள் பெரும்பாலும் முழு எண்களாக வருவதால், அவைகளை மிகமிகச் சிறிய நீளங்களைக் கொண்ட, பிரிவு இடைவெளிகளாக மாற்றி அமைத்திட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாகக் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை (0, 1, 2, 3,......)-க்கு ஏற்றவாறு குடும்பங்களைப் பிரித்தல், வீடுகளை அவற்றில் இருக்கும் அறைகளுக்கு (rooms) ஏற்றவாறு பிரித்தல் முதலிய பரவல்களை இயல்நிலைப் பரவல்களாக மாற்றி அமைத்திடல் இயலாது. சில சந்தர்ப்பங்களில் தனித்த மாறிகளை வேண்டுமென்றே நம் தேவைக்கேற்ப, தொடர்மாறி மதிப்புகளாக மாற்றி, இயல்நிலைப் பரவலை அமைத்திடலாம். மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களை இயல்நிலைப் பரவலாக அமைத்திட முடியும். பெரும்பாலும் ஒரு முகடினைக் கொண்ட (Unimodal) பரவல்கள், அமைப்பில் இயல்நிலைப் பரவலை இறுதியில் ஏற்பனவைகளே.

இயல்நிலை வளைகோடு சில சிறந்த பண்புகளைப் பெற்றிருப்பதால், கணக்கியலைச் சார்ந்த புள்ளியியல் முறைகளில் பெரிதும் பயன்பட்டு வருகிறது. மாதிரிக் கூறெடுத்தல் கொள்கைகளில், முழுமைத் தொகுதியின் தூய்மைத்துணை அலகுகளை (true population parameters) மதிப்பீடு செய்யும் மாதிரிகளின் அலகுகள் முற்றிலும் அல்லது சற்றுக் குறைந்த அளவில் இயல்நிலைகளைப் பெறுகின்றன. இதன் அடிப்படைத் தத்துவத்தைக் கொண்டுதான் விரிந்த மாதிரித் தேர்வுகளில் (large sampling) கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகையின் தரத்தை மதிப்பீடு செய்யமுடிகிறது.

ஒழுங்கு விதிப் பண்பினை ஏற்காத மாறியை, சில மாறுதல்களின் (transformations) வாயிலாக இயல்நிலைப் பரவலை இறுதியில் பெரும் மாறியாக மாற்றியமைக்கவும் கூடும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. ஒரே விளக்கப் படத்தில் பின்வரும் இயல்நிலை வளைகோடுகளை வரைந்து அவைகளுக்குள்ள ஒற்றுமை, வேற்றுமைகளை விளக்கிடுக.

1ஆவது வளைகோடு; இதன் கூட்டுச் சராசரி: 0; திட்டவிலக்கம்:1

2ஆவது வளைகோடு; இதன் கூட்டுச் சராசரி: 2; திட்டவிலக்கம்:1

3ஆவது வளைகோடு; இதன் கூட்டுச் சராசரி: 2; திட்டவிலக்கம்:2

ஓர் இயல்நிலை வளைகோட்டை நிறுவனம் செய்யும் சமன்பாட்டில் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் உதவிபுரிகின்றன. வளை கோட்டின் உருவம், மொத்த அலைவெண்ணால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. எனவே, இயல்நிலை வளைகோட்டை நிர்ணயிக்கும் சமன்பாட்டை,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-t^2/2} \quad t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

எனக் கொள்ளலாம்.

இங்கு 1ஆவது வளைகோட்டை நிர்ணயிக்க $\bar{x} = 0$ எனவும், $\sigma = 1$ எனவும் எடுக்கவேண்டும். ஆதலால்,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\bar{x}^2/2}$$, $t = x$-என ஆகிறது.

2ஆவது வளைகோட்டை நிர்ணயிக்க $\bar{x} = 2$, $\sigma = 1$ எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

ஆதலால்,

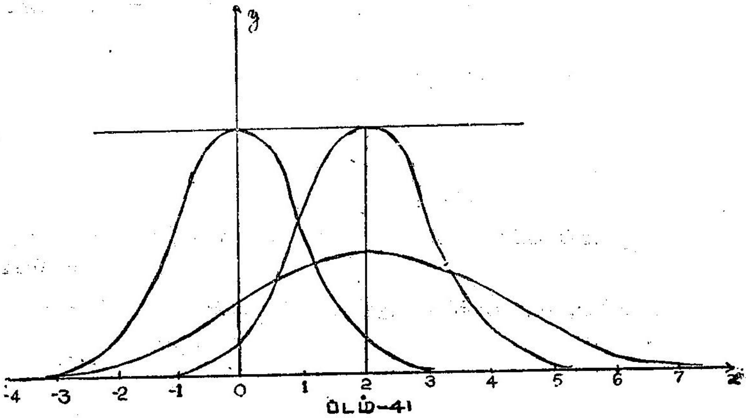
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1} e^{-t^2/2}, \quad t = \frac{x-2}{1} = x-2$$ என்றாகும்.

3ஆவது வளைகோட்டை $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2} e^{-t^2/2}$, $t = \frac{x-2}{2}$

என்ற சமன்பாடு நிறுவனம் செய்கிறது. இம்மூன்றினையும் வரையத் துணைபுரியும் அட்டவணையை (பக்கம் 222-ல்) குறிப்போம்.

	நிலைக்கோடு பெருமத்தின் அளவு	அது வருமிடம்	அடைபடும் பரப்பளவு	பரவலமைப்பு	குவிவு பாகத்தைக் குழிவு பாகமாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் வருமிடம்
1 ஆவது வளைகோடு	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \cdot 3989$	$x = 0$	1	$x=0$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக் கோட்டிற்கு இரு புறங்களிலும் ஒரே சீரான பரவலைப் பெற்றுள்ளது.	$x = \pm 1$
2 ஆவது வளைகோடு	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \cdot 3989$	$x = 2$	1	$x=2$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக்கோட்டிற்கு இருபுறங்களிலும் ஒரே சீரான பரவலைப் பெற்றுள்ளது.	$x = 1, x = 3$
3 ஆவது வளைகோடு	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2} = \cdot 19945$	$x = 2$	1	$x=2$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக் கோட்டிற்கு இருபுறங்களிலும் ஒரே சீரான பரவலைப் பெற்றுள்ளது.	$x = 0, x = 4$

இங்கு அலைவெண் பரவல்கள் மூன்றும் அமைப்பில் இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளன. (1), (2) வளைகோடுகள் உருவ அமைப்பில் முற்றிலும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. ஆனால், அவைகள் $x=0$, $x=2$ என்னும் புள்ளிகளின் வழியே வரையும் நிலைக்கோடுகளுக்கு



படம்—4

இருபுறங்களிலும் ஒரே சீரான அமைப்பினைப் பெற்றுள்ளன. எனவே, இவைகள் இடை அமைப்பில்தான் மாறுபடுகின்றன. (3) ஆவது வளைகோட்டின் திட்ட விலக்கம் (1) (2) வளைகோட்டின் திட்ட விலக்கத்தின் இருமடங்கானதால், இதன் உச்சிப் புள்ளியின் உயரம், மற்ற இரு வளைகோடுகளின் உச்சிப் புள்ளிகளின் உயரத்தில் பாதியாகிறது; இது மற்றவைகளைவிட, விரிந்த பரவலைப் பெற்றுள்ளது.

(1)ஆவது, (2)ஆவது பரவல்களில் கூட்டுச் சராசரிதான் மாறுபடுகிறது.

(1)ஆவது, (3)ஆவது பரவல்களில் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கங்கள் மாறுபடுகின்றன.

(2)ஆவது, (3)ஆவது பரவல்களில் கூட்டுச் சராசரி ஒரே இடத்தில் உள்ளது. ஆனால், திட்டவிலக்கங்கள் மாறுபடுவதால் இவைகள் பரவலில் மாறுபடுகின்றன.

மற்ற ஒற்றுமை, வேற்றுமைகளை அட்டவணை வெளிப்படுத்துகிறது.

2. x மாறியின் இயல்நிலைப் பரவலில் மொத்த அலைவெண் 10,000 எனவும், திட்ட விலக்கம் 6 எனவும், ஒரு குறிப்பிட்ட

x-ன் மதிப்புக்கும், கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-க்கும் உள்ள வேற்றுமை 9 எனவும் வருமானல், அக் குறிப்பிட்ட மதிப்பளவை எத்தனை தடவைகள் எதிர்பார்க்கலாம் ?

இங்கு $N = 10{,}000, \quad \left| x - \bar{x} \right| = 9, \sigma = 5.$ எனவே,

$$t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{9}{6} = 1{\cdot}5.$$

$$y = \frac{N}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \frac{10{,}000}{5} \phi(t)$$

ஆதலால், பட்டியலில் $t = 1{\cdot}5$க்கு நேரான $\phi(t)$ - யின் மதிப்பு $= 0{\cdot}1295$

எனவே, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்ணின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{10{,}000}{5} \times {\cdot}1295$$

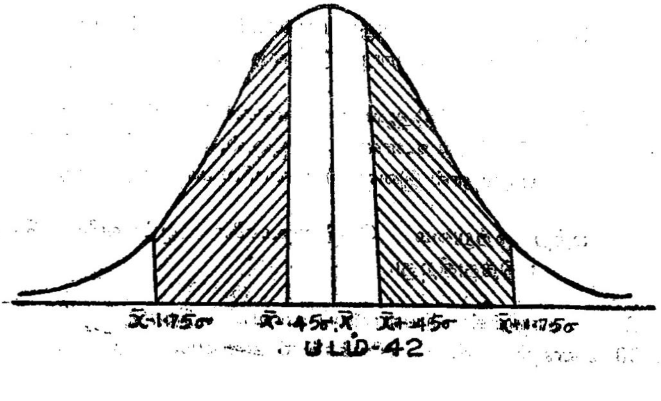
$$= 2{,}000 \times {\cdot}1295$$

$$= 259{\cdot}0000$$

$$= 259$$

அதாவது, குறிப்பிட்ட x மதிப்பெண், சுமாராக 259 தடவைகள் வரலாம் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது.

3. 20,000 நிகழ்ச்சிகள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளன. இயல்நிலைப் பரவல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, எவ்வளவு நிகழ்ச்சிகள் $\pm\, 0{\cdot}4\sigma$ - க்கு வெளிப்புறமாகவும், $\pm\, 1{\cdot}7\sigma$-க்கு உட்புறமாகவும் மதிப்புகளைப் பெறும் என்பதைக் கணக்கிடுக.



படம்-42

இங்கு $t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

$\therefore x - \bar{x} = t \cdot \sigma$

எனவே $t = 0$லிருந்து $t = 1 \cdot 7$ வரை மதிப்புகளை ஏற்கும் நிகழ்ச்சிகளின் விகிதம்

ஆதலால், $\pm 1 \cdot 7$க்குள் t மதிப்பினை ஏற்கும் நிகழ்ச்சிகளின் விகிதம் $= 2 \times \cdot 4554 = \cdot 9108$

அவ்விதமே $\pm \cdot 4$-க்குள் t மதிப்பினை ஏற்கும் நிகழ்ச்சிகளின் விகிதம் $= 2 \times \Big\{$ 0-லிருந்து, + 0·4 -க்குள் t ஏற்கும் நிகழ்ச்சியின் விகிதம் $\Big\}$

$= 2 \times 0 \cdot 1554 = 0 \cdot 3108$

எனவே, $\pm 0 \cdot 4$-க்கு வெளியிலும், $\pm 1 \cdot 7$-க்கு உட்புறமும் உள்ள இடைவெளிகளில் t-ஏற்கும் நிகழ்ச்சிகளின் விகிதம் (வரை படத்தைக் கவனிக்கவும்).

$= 0 \cdot 9108 - 0 \cdot 3108$

$= 0 \cdot 6000$

ஆதலால் $\pm 0 \cdot 4\sigma$ க்கு வெளியிலும் $\pm 1 \cdot 7\sigma$ க்கு உட்புறமும் ஏற்படும் நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $= 0 \cdot 6 \times 20{,}000 = 12{,}000$.

(4) x மாறியின் இயல்நிலைப் பரவலில் $\bar{x} = 50$ எனவும், $\sigma = 9$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. கால்மானங்களின் மதிப்புகள், கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலை, கீழ்க் கால்மானம், இடைநிலை, மேல் கால்மானங்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளின் வழியே வரையப்படும் நிலைக் கோடுகள் பரவலை 4 சமபகுதிகளாக்கும் என அறிவோம்.

இங்குப் பரவலின் அமைப்பு ஒழுங்குபட்டதால், இடைநிலை அளவு, கூட்டுச் சராசரியின் அளவுக்குச் சமமாகும். மேலும் (Q_1, Q_3)-பிரிவு இடைவெளிக்குள் அடைபடும் பரப்பளவின் விகிதம் $\frac{1}{2}$ ஆவதால் கீழ்க்கால்மானம் (Q_1), கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து, ஊகத்தின் பிழை அளவுக்குக் குறைவுபட்டும், மேல் கால்மானம் கூட்டு சராசரியைவிட ஊகத்தின் பிழை அளவுக்கு அதிகப்பட்டுமுள்ளது எனவும் அறியலாம்.

எனவே,

$$Q_1 = \bar{x} - \text{P.E.} = 50 - \frac{2}{3}\sigma = 50 - \frac{2}{\not 3} \times \overset{3}{\not 9} = 50 - 6 = 44.$$

$$Q_3 = \bar{x} + \text{P.E.} = 50 + \frac{2}{3}\sigma = 50 + \frac{2}{3} \times 9 = 50 + 6 = 56.$$

ஆதலால் கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{56 - 44}{2} = \frac{12}{2} = 6$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}\sigma = \frac{4}{5} \times 9 = \frac{36}{5} = 7 \cdot 2$

5. 1,000 பள்ளி மாணவர்களின் தரவரிசைக் கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic mean of grades) 79% என்றும், திட்ட விலக்கம் 11% என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதனை ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாகக் கருதி, (i) 90%-க்குமேல் தரவரிசையைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையையும் (ii) தரவரிசையில் கீழ்க்கடைக் கோடியிலிருந்து முப்பத்தொன்பதாக வரும் மாணவனின் தரமதிப்பையும், (iii) நடுவில் வரும் 900 மாணவர்களின் கீழ்த்தர, மேல்தர எல்லைகளையும் காண்க.

இங்கு, $N = 1,000, \ \bar{x} = 79\%, \ \sigma = 11\%$

(i) $x > 90$க்குமேல் வரவேண்டுமானதால், $t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{90 - 79}{11}$

$= \frac{11}{11} = 1$-க்குமேல் மதிப்பினைப் பெறவேண்டும்.

எனவே $t \geqslant 1$க்கு உகந்த பரப்பளவு, (அட்டவணையின்படி)

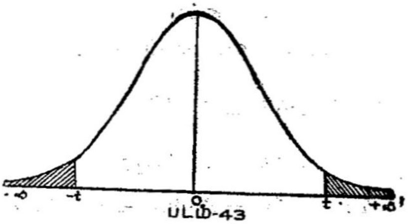
$$= \int_1^\infty \phi(t)\, dt = \int_0^\infty - \int_0^1$$

$$= 0 \cdot 5000 - 0 \cdot 2420$$

$$= 0 \cdot 2580$$

ஆதலால் 90%க்குமேல் தரவரிசையைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 1,000 \times 0 \cdot 2580$

$$= 258.$$



படம்-43

(ii) இங்குப் பரப்பளவு $= \frac{38}{1,000} = \cdot 039$

எனவே, $\int_{-\infty}^{-t} \phi(t)\, dt = \cdot 039$

(பட்டியலின்படி)

$0\cdot5000 - \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 039$

$\therefore \int_{0}^{t} \phi(t) dt = 0\cdot5000 - \cdot039 = \cdot4610$

$\therefore t = 1\cdot765$

ஆதலால், $-1\cdot765 = \frac{x-79}{11}$

$x - 79 = -19\cdot415$

$x = 79 - 19\cdot415$

$= 59\cdot585$

$= 60$ (தோராயமாக)

$\cdot4610 - ?$

$\cdot4641 - 1\cdot8$

$\cdot4554 - 1\cdot7$

$\cdot0087 - 0\cdot1$

$\cdot4641$

$\cdot4610$

$\cdot0031$

$\frac{0\cdot1}{0\cdot0087} \times \cdot0031$

$\frac{3\cdot1}{87} = 0\cdot035$

$\therefore \cdot4610 = 1\cdot8 - 0\cdot035$

$= 1\cdot765$

எனவே, கீழ் வரிசையிலிருந்து 39ஆவது மாணவனுக வருகிறவனின் தரமதிப்பு 60 எனக் கொள்ளலாம்.

(iii) நடுவில் வரும் 900 மாணவர்களுக்கு ஏற்ற பரப்பளவு

$= \frac{900}{1000} = \cdot 9$ எனவே $\int_{-t}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 9$

$$2 \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 9$$

$$\int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 45$$

அட்டவணையின்படி t-ன் மதிப்பு = 1·65

எனவே ± 1·65 இடைவெளிக்குள் அடைபடும் பரப்பு = 0·9

$$t=\frac{x-\bar{x}}{\sigma} \quad \therefore \quad -1{\cdot}65 = \frac{x-79}{11}$$

$$x-79 = -18{\cdot}15$$

$$x=79-18{\cdot}15 = 60{\cdot}85 = 61 \text{ (தோராயமாக)}$$

கீழ் எல்லை : $x=61$

அதேபோல், $1{\cdot}65 = \dfrac{x-79}{11}$

$$\therefore x = 79+18{\cdot}15 = 97{\cdot}15 = 97 \text{ (தோராய்மாக)}$$

மேல் எல்லை : $x = 97.$

எனவே, நடுவில் வரும் 900 மாணவர்களின் கீழ்த்தர, மேல்தர எல்லைகள் முறையே 61%, 97% ஆகின்றன.

6. இரு இயல்நிலைப் பரவல்களின் மொத்த அலைவெண்கள் சம மெனவும், முதல் பரவலின் திட்ட விலக்கம் இரண்டாவதின் திட்ட விலக்கத்தின் இரு மடங்கு எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் பரவலின் நிலைக்கோட்டின் பெருமம் 8ஆனால், இரண்டாவது பரவலின் நிலைக்கோட்டின் பெருமத்தைக் காண்க.

இயல்நிலைப் பரவலின் வளைகோட்டை நிறுவனம் செய்யும் சமன்பாடு :

$$y=\frac{N}{\sigma}\phi(t)$$

$\phi(t)$-ன் பெருமம் = $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = {\cdot}3989$ (பட்டியலில் உள்ளபடி)

எனவே, முதல் இயல்நிலைப் பரவலில், நிலைக்கோட்டின்

$\dfrac{N}{2\sigma}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\sigma =$ முதல் பரவலின் திட்ட விலக்கம். இதன் மதிப்பு 8 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே,

$$\frac{N}{2{\cdot}\sigma}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=8$$

$$\therefore \quad \frac{N}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 16.$$

இரண்டாவது இயல்நிலைப் பரவலில், நிலைக்கோட்டின் பெருமம்,

$$y = \frac{N}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= 16.$$

7. இருவகை எரிமின்கலங்கள் (torch batteries) ஒவ்வொன்றும் சராசரியாக 60 மணி எரியக்கூடியவைகளாகவும், திட்ட விலக்கங்கள் $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$ மணி எனவும் இருக்குமானால், ஒவ்வொரு வகையிலும் 57 மணிக்குமேல் எரிய முடியாமலிருக்கும் எரிமின்கலத்தின் வாய்ப்பை (அல்லது ஊக அளவையை)க் கணக்கிடவும்.

முதல் வகை எரிமின்கலத்தின் சராசரி எரியும் நேரம் $=60$ மணி.

முதல் வகை எரிமின்கலத்தின் திட்ட விலக்கம் $=\frac{3}{2}$ மணி.

$$\text{இங்கு } t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{57-60}{3/2} = -2.$$

எனவே, நமக்குத் தேவையான ஊக அளவை $\Big\} = P(-\infty \leqslant t \leqslant -2)$

$$= \int_{-\infty}^{-2}$$

$$= \int_{2}^{\infty} = \int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{2}$$

$$= 0{\cdot}5000 - 0{\cdot}4772$$

$$= 0{\cdot}0228.$$

ஆதலால் 1,000 பாட்டரிகளில் 23 பாட்டரிகள் 57 மணிக்குக் குறைவாக எரியும் என அறியலாம்.

இரண்டாவது எரிமின்கலத்தின் சராசரி எரியும் நேரம் $= 60$ மணி

இரண்டாவது எரிமின்கலத்தின் திட்ட விலக்கம் $= \frac{9}{4}$ மணி

$$\text{இங்கு } t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} = \frac{57-60}{9/4} = -3 \times \frac{4}{9} = -1{\cdot}333$$

எனவே, நமக்குத் தேவையான ஊக அளவை $\Big\} = P(-\infty \leqslant t \leqslant -1{\cdot}333)$

$$= \int_{\infty}^{-1\cdot333}$$

$$= \int_{1\cdot333}^{\infty} = \int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{1\cdot333}$$

$$= 0{\cdot}5000 - 0{\cdot}40848$$

$$= 0{\cdot}09152$$

ஆதலால் 1,000 எரிமின்கலங்களில், 91 எரிமின்கலங்கள் 57 மணிக்குக் குறைவாக எரியுமென அறியலாம்.

முழு வளர்ச்சி அடைந்த மனிதர்களில் 15% 5 அடி 10 அங்குலமும் அதற்கு மேலும் உயரமுள்ளவர்களாகவும், 10% 5 அடிக்குக் குறைவான உயரமுள்ளவர்களாகவும் இருப்பார்களேயானல், உயரங்கள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது எனக்கொண்டு, அவர்களின் சராசரி உயரம், திட்ட விலக்கம் ஆகிய இவற்றைக் காண்க.

இங்கு 5 அடிக்குக் குறைவானவர்களின் விகிதம் $= 10\% = \frac{1}{100} = \cdot 1$

எனவே $\int_{-\infty}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 1$

$$\int_{t}^{\infty} \phi(t)\, dt = \cdot 1$$

$$\int_{0}^{\infty} \phi(t)dt - \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 1$$

$$\cdot 5 - \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = \cdot 1$$

$$\therefore \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = 0\cdot 5 - 0\cdot 1 = 0\cdot 4$$

$$\therefore t = 1\cdot 28$$

$$\frac{60 - \bar{x}}{\sigma} = -1\cdot 28 \qquad \ldots\ldots 1$$

$$\therefore 60 - \bar{x} = -1\cdot 28\,\sigma$$

$$\bar{x} - 1\cdot 28\,\sigma = 60 \qquad \ldots\ldots 2$$

5 அடி 10 அங்குலத்திற்குமேல் உயரமுடையவர்களின்

$$\text{விகிதம்} = \frac{15}{100} = \cdot 15.$$

எனவே, $\int_{t}^{\infty} \phi(t)\, dt = \cdot 15$

$$\int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{t} = \cdot 15$$

$$\therefore \quad \int_0^t = 0{\cdot}5 - {\cdot}15 = {\cdot}35$$

$$\therefore \quad t = 1{\cdot}04.$$

$$\frac{70 - \bar{x}}{\sigma} = 1{\cdot}04 \text{ அதாவது } 70 - \bar{x} = 1{\cdot}04\,\sigma \qquad ......3$$

$$\therefore \quad \bar{x} + 1{\cdot}04\,\sigma = 70 \qquad ......4$$

2, 4 சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $\left.\begin{array}{l}\bar{x} = 65{\cdot}5 \text{ அங்குலம்} \\ \sigma = 4{\cdot}3 \text{ அங்குலம்}\end{array}\right\}$ என்று கிடைக்கின்றன.

பயிற்சி

1. இயல்நிலைப் பரவலின் அமைப்பை விவரி.

2. இயல்நிலை வளைகோட்டின் சில சிறந்த பண்புகள் யாவை ?

3. இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவத்தைப் பற்றியும் புள்ளியியலில் இயல்நிலை வளைகோடு எந்தெந்த வகைகளில் பயன்படுத்தப் படுகிறது என்பதையும் சில எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

4. ஊகத்தின் பிழை என்றால் என்ன ?

5. ஓர் இயல்நிலை வளைகோட்டில் வரும் மொத்த அலைவெண்கள், கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவை எவ்வாறு இயல்நிலைப் பரவலின் அமைப்பைப் பாதிக்கின்றன ?

6. x மாறியின் இயல்நிலைப் பரவல் அமைப்பில், பின்வரும் இடைவெளிகளுக்கேற்ப, ஊக அளவைகளைக் கணக்கிடுக.

(i) $\bar{x} - \sigma \leqslant x \leqslant \bar{x} + \sigma$ (iv) $\bar{x} - \frac{2}{3}\sigma \leqslant x \leqslant \bar{x} + \frac{2}{3}\sigma$

(ii) $\bar{x} - 2\sigma \leqslant x \leqslant \bar{x} + 2\sigma$ (v) $\bar{x} - 1{\cdot}96\sigma \leqslant x \leqslant \bar{x} + 1{\cdot}96\sigma$

(iii) $\bar{x} - 3\sigma \leqslant x \leqslant \bar{x} + 3\sigma$ (vi) $\bar{x} - \text{P.E.} \leqslant x \leqslant \bar{x} + \text{P.E.}$

இங்கு $\bar{x}$, σ என்பன முறையே x மாறியின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் தெரிவிக்கின்றன.

7. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம் ஆகியவை 15 : 12 : 10 என்ற விகிதத்தில் (தோராயமாக) இருக்குமென நிரூபிக்க.

8. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் மொத்த அலைவெண்கள் 1,000 எனவும், கூட்டுச் சராசரி 48 எனவும், திட்ட விலக்கம் 6 எனவும் வருமானால் கால்மானங்களையும், கால்மான விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

[விடை : $Q_1 = 44$; $Q_3 = 52$; கால்மான விலக்கம் = $Q = 4$]

9. 10,000 நிகழ்ச்சிகள் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளன. இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 60 என்றும், ஊகத்தின் பிழை 10 எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இயல்நிலைப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தாமலேயே கால்மானங்கள், இடைநிலை, முகடு, திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. திரள் அலைவெண் 2500க்குரிய மாறியின் மதிப்பளவைக் காண். [விடை: $Q_1 = 50$; $Q_3 = 70$; இடைநிலை= முகடு $= 60$; திட்ட விலக்கம்$=15$; கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்$=12$; கால்மான விலக்கம் $= 10$; திரள் அலைவெண் 2500க்குரிய மாறியின் மதிப்பு $= 50$]

10. $t = 2{\cdot}4$; $t = -2{\cdot}4$; $t = {\cdot}-6$ இவைகளுக்கு ஏற்ற $\phi(t)$ மதிப்புகளைக் கொடு.

11. கீழ்வரும் பிரிவு இடைவெளிகளுக்குள் அடைபடும் பரப்புகளை, இயல்நிலைப் பரவல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக.

(i) $t = 0$ - விருந்து $t = +3$ வரை

(ii) $t = -3$ - விருந்து $t = +3$ வரை

(iii) $t = 1{\cdot}5$ - விருந்து $t = 2{\cdot}5$ வரை

(iv) $t = -2$ - விருந்து $t = 1{\cdot}3$ வரை

(v) $t = 0$ - விருந்து $t = 0{\cdot}6745$ வரை.

12. மொத்த எண்ணிக்கை = 1500; கூட்டுச் சராசரி = 75; திட்ட விலக்கம் = 10 உள்ள x மாறியின் பரவல் அமைப்பு இயல்நிலைப் பரவலுக்கு ஒத்திருக்குமானல்,

(i) திரள் அலைவெண் = 800 ஆக ஏற்படும் x-ன் மதிப்பையும்,

(ii) $60 \leqslant x \leqslant 80$ என்ற பிரிவு இடைவெளிகளுக்குள் வரும் அலைவெண்களின் எண்ணிக்கையையும்,

(iii) x - ன் மதிப்பு 80-க்கு மேல் வரும் அலைவெண்களின் எண்ணிக்கையையும் கணக்கிடுக.

13. 1,000 பள்ளி மாணவர்களின் தரவரிசைக் கூட்டுச் சராசரி 78% எனவும், திட்ட விலக்கம் 11% எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தரங்களின் பரவலை இயல்நிலைப் பரவலாகக் கருதி,

(i) 85% தரவரிசைக்கு மேல் வரும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையையும், (ii) கால்மான விலக்கத்தையும் காண்க.

14. ஒரு மரத்திலுள்ள 900 இலைகளின் நீளங்களை அளந்ததில் அதன் கூட்டுச் சராசரி 3 செ.மீ. எனவும், திட்ட விலக்கம் 0·5 செ.மீ. எனவும் தெரிந்தது. இதன் பரவலை இயல்நிலையாகப் பாவித்து,

(i) 4·2 செ.மீ. க்குமேல் நீளங்களையுடைய இலைகள் எவ்வளவு என்றும், (ii) 2 செ. மீ. க்குக்கீழ் நீளங்களை உடைய இலைகள் எவ்வளவு என்றும் கணக்கிடுக. [விடை : (i) 7 இலைகள், (ii) 21 இலைகள்]

15. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலமைப்பில் நிகழ்ச்சிகளில் 7% நிகழ்ச்சிகள் 35க்குக் குறைவான மதிப்பினையும், 11% நிகழ்ச்சிகள் 63 க்குமேல் மதிப்பினையும் பெற்றிருந்தால், அப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. [விடை : $\bar{x} = 50 \cdot 3; \sigma = 10 \cdot 3$]

13. புள்ளியியலில் வரும் முழுமைத் தொகுதிகளின் கருத்துகள்

(Statistical Populations)

(பொதுக் கொள்கைகள்)

நடைமுறைச் சிக்கல்களில், புள்ளியியல் ஆராய்ச்சியாளர் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் ஆராய முடியாமலிருந்தும் ஆராய முற்படுகிருர். முழுமைத் தொகுதி என்பது பல உறுப்புகள் கொண்டது. இச்சொல்லுக்கு மக்கட் தொகுதி என்ற பொருள் மட்டுமின்றி, ஒருபடித்தான உறுப்புகள் கொண்ட தொகுதியையும் குறிக்கும். தொகுதியில் வரும் உறுப்புகள் பொருள்களாகவோ, நிகழ்ச்சிகளாகவோ இருக்கலாம். உதாரணமாக, ஒரு மரத்தில் உள்ள காய்கள், இலைகள் முதலிய பொருள்கள் ஒரு முழுமைத் தொகுதியாகும். அவ்வாறே, ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் மின் குழிகளின் எண்ணிக்கையும் ஒரு முழுமைத் தொகுதியையே குறிக்கும். எனவே, எல்லா உறுப்புகளும் அடங்கிய தொகுதியை, முழுமைத் தொகுதி என்கிறோம்.

தொகுதியில் வரும் எண்ணிக்கைகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதாகில், அத்தொகுதியை 'வரையறுக்கப்பட்ட தொகுதி' எனவும், எண்ணிக்கைகள் வரம்பற்றதாயிருப்பின், அத் தொகுதியை 'வரம்பற்ற தொகுதி' எனவும் இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒரு கல்லூரியிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஒரு வரம்புக்குட்பட்டது. எனவே, இத் தொகுதி வரையறுக்கப்பட்ட தொகுதிக்குச் சான்ருகும். ஒரு குதிரிலுள்ள நெல்மணிகளை ஒரு வரம்பற்ற தொகுதிக்குரிய சான்ருகக் கூறலாம். ஏனெனில், குதிரிலுள்ள நெல் மணிகளை ஒவ்வொன்ருக எண்ணுவது இயலாத காரியம்.

தொகுதி ஒன்றையே, மற்ருெரு முழுமைத் தொகுதியின் பகுதியாகக் கொள்ளலாம். சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தில் பயிலும் மாணவர்கள், இந்தியாவிலுள்ள எல்லாப் பல்கலைக்கழகங்களிலும் பயிலும் மாணவர்களில் ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியேயாகும்.

ஆனால், உலகிலுள்ள எல்லா மருத்துவச் சாலைகளில் அவ்வப்போது உள்ள நோயாளிகளின் வெப்ப நிலையை மணிக்கொரு தடவை அளவிட்டுத் தொகுத்துக் கொண்டே சென்றால் அவைகளனைத்தும் ஒரு முடிவிலாத் தொகுதியாகும். மேலும், இதில் ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட மருத்துவச் சாலைகளில் தொகுக்கப்பட்ட நோயாளிகளின் வெப்ப நிலை, ஒரு முடிவிலா முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியாகும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதி உண்மையான உறுப்புகளாலானதாக யிருக்கலாம். அல்லது கற்பனையால் உருவாக்கப்பட்டதாகவுமிருக்கலாம். ஒரு கல்லூரியிலுள்ள மாணவர்களின் எடை, உயரம், மார்புச் சுற்றளவு முதலியவைகளின் தொகுமை ஓர் உண்மையான முழுமைத் தொகுதியாகும். ஏனெனில், இவைகளனைத்தும் நேரடியாக நாம் எடுக்கும் புள்ளி விவரங்கள். ஆனால், ஒரு பகடையைப் பல முறை உருட்டாமலேயே அவைகளில் வரும் நிகழ்ச்சிகளைப்பற்றிச் சிந்திக்க முடியும். அவ்விதம் உண்டாகும் நிகழ்ச்சிகளின் கூடுதலை ஒரு கற்பனை முழுமைத் தொகுதியாகக் கருதலாம். நடைமுறையில் நிகழ்ச்சிகளை உண்மையாகவே நிகழும்படி செய்து, அவைகளைக் கற்பனையால் உருவாக்கக்கூடிய ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பகுதியாகப் பாவித்து, புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகள் நடைபெறுகின்றன.

முழுக் கணிப்பு முறையும், மாதிரித் தேர்வு முறையும்.
(Census and Sampling Methods)

முழுக் கணிப்பு முறை என்பது உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் பரிசீலனைக்கு ஏற்று, அவைகளுக்குள்ள பண்புகளனைத்தையும் ஆராயும் முறையாகும். மக்கட் கணிப்பு முறையே (Census) இதற்கேற்ற எடுத்துக்காட்டாகும். இம் முறைக்கு மாறானதே மாதிரித் தேர்வு முறையாகும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அதன் தன்மைகளை அறிய, ஒரு சில உறுப்புகளை எடுத்து அமைக்கும் கூறுக்கு மாதிரிக் கூறு (Sample) என்று பெயர். மாதிரிக் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளை அறிய முயலும் முறைக்கு ‘ மாதிரித் தேர்வு முறை ’ (Sampling Method) எனப் பெயர்.

மாதிரிக் கூறின் அவசியம்

நாட்டு மக்களின் முன்னேற்றங்களில் அரசாங்கத்தார் கவனம் செலுத்தி வருவது எல்லோருக்கும் தெரிந்ததே. நாட்டின் க்ஷேம நிலைக்காகவும், அதிலிருக்கும் மக்கள், மிருக, தாவர வர்க்கங்களின் நலனுக்காகவும், அவைகளைப் பற்றிய முழுக் கணக்கு விவரம் எடுக்க வேண்டிய நிலைமை அரசாங்கத்தாருக்கு ஏற்படுகின்றது. ஆனால், சமூகத்தைப்பற்றிய செய்திகள் அநேக விதங்களில் பாதிக்கப்பட்டு

இருக்கின்றன. ஆதலால் முழுப் புள்ளி விவரம் எடுக்க அரசாங்கத்தாருக்கு அதிகப் பணச் செலவும், கால தாமதமும் ஏற்படுகிறது.

நடைமுறைச் சிக்கல்களில் முழுமைத் தொகுதியின் குணங்களைப் பற்றி அறிவதற்கு ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பரிசீலனை செய்து முடிவுக்கு வருவது இயலாது. அதனால் ஒரு மூல முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்களை, அதிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட ஒரு மாதிரிக் கூறு தெரிவிக்கும் என்று எல்லோரும் தமது அனுபவத்தாலும், பகுத்தறிவாலும் நினைப்பது இயல்பு. 'ஒரு பானைச் சோற்றுக்கு ஒரு சோறு பதம்' என்ற பழமொழியே இதற்குச் சான்றாகும். மேலும், ஒரு தானிய வியாபாரியால் தானியக் குவியல்களின் தரத்தை மாதிரிக் கூறுகளில் அடங்கிய பொருள்களின் தரத்தைக் கொண்டு ஆராய முடிகிறது. ஏனெனில், மாதிரிக் கூறு முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றிய விவரத்தைத் தெரிவிக்குமென்பது நம்பிக்கையும் அனுபவமுமாகும்.

இக் காரணங்களை யொட்டியே அரசாங்கத்தார், மக்கள் மதிப்பீட்டைத் தவிர, மற்றக் கணிப்புகளில், மாதிரி முறையைக் கையாண்டு, முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி நிர்ணயிக்கிறார்கள்.

முழுக் கணிப்பு விவரம் எல்லா ஆராய்ச்சிகளிலும் தேவை இல்லை. ஏனெனில், சிறந்த முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பண்புக் கூறின் மூலம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி, குறைந்த செலவில், புள்ளியியலின் முறைகளைக் கடைப்பிடித்து அறிய முடிகிறது. தவிரவும், பல சமயங்களிலும், அநேக இடைக் காலங்களிலும்கூட மாதிரிக் கூறு எடுப்பினால் ஆராய முடிகிறது. மேலும், அவ்வப்பொழுது காலத்திற்குரிய செய்திகளையும் சேர்த்துக்கொள்ள முடியும். ஒரு முழுக் கணக்கெடுப்பில், செய்திகள் சரியாக அமையாதமையாலும், முடிவற்றதாய் இருப்பதாலும் ஏற்படக் கூடிய பிழைகளைவிட, மாதிரித் தேர்வுகளில் ஏற்படும் பிழைகள் பொறுக்கக்கூடியவை. இப் பிழைகளைக் கூடுமான வரையில் குறைக்கவும் முடியும். எனவே, தகுந்த, வகைப்படுத்திய மாதிரிக் கூறு தேர்ந்தெடுப்பது மிக அவசியம் என்பது தெளிவாகிறது.

ஒரு வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கணக்கியல் ஊக அளவைக் கோட்பாட்டின்படி, அதிக எண்ணிக்கைகள் அடங்கிய ஓர் இயைபிலா மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதால், அந்த மாதிரியில் அடங்கியிருக்கும் உறுப்புகள், மொத்தத்தில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் குணாதிசயங்களைப் பெற்றிருக்கும் என அறிவிக்கும், புள்ளி விவர ஒழுங்கு நியதியைக் கையாண்டு மாதிரிகளில் அடங்கிய உறுப்புகளின் குணாதிசயங்களைப் புள்ளியியல்

முறைகளால் பாகுபடுத்தி, முழுமைத் தொகுதியின் தரத்தைப் பற்றி அறியலாம்.

மாதிரிக் கூறின் நோக்கங்கள்

1. மிகக் குறைந்த முயற்சியினுல் மூல முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய மிக அதிகமான தகவல்களை அறிய முடிகிறது.

2. மதிப்பீடுகளின் நம்பிக்கைத் தரத்தை மாதிரிக் கூறின் தத்துவத்தினுல் புறவியலாக அறிய முடிகிறது. எடுக்கும் மாதிரிக் கூறு முழுமைத் தொகுதிக்கு எவ்வளவுக் கெவ்வளவு ஒத்துள்ளதோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு நமது அனுமானங்களும் சிறப்புற்றிருக்கும்.

மாதிரிக் கூறு தேர்வு முறையின் வகைகள்

ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து ஒரு சில குறிப்பிட்ட உறுப்பு களைத் தேர்ந்தெடுத்து ஒரு மாதிரிக் கூறு அமைக்கலாம். தேர்ந் தெடுக்கும்பொழுது உபயோகிக்கும் முறைக்குத் தக்கவாறு மாதிரிக் கூறுகளைப் பின்வருமாறு பிரிக்கலாம் :

1. இயைபிலா மாதிரிக் கூறு (Random Sample)
2. ஒழுங்குபட்ட மாதிரிக் கூறு (Systematic Sample)
3. படுகை மாதிரிக் கூறு (Stratified Sample)
4. பலநிலைக் மாதிரிக் கூறு (Multiple Sampling)
5. படிப்படி மாதிரிக் கூறு (Sequential Sampling)

இயைபிலா (ராண்டம்) மாதிரிக் கூறு

ஒரு மூல முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தனித்த ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரே மாதிரியான (சமமான) வாய்ப்பு அளித்துத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு சில உறுப்புகள் அடங்கிய ஒரு மாதிரிக் கூறுக்கு இயைபிலா மாதிரிக் கூறு என்று பெயர். இந்த விதியைக் கையாளும்போது, இயைபிலா மாதிரிக் கூறின் பலதரப்பட்ட உறுப்புகள் முழுமைத் தொகுதியிலிருக்கும் உறுப்புகளின் அதே விகிதாசாரத்தைக் கூடுமான வரையில், மற்ற எந்த விகிதா சாரத்தைக் காட்டிலும் பெற்றிருக்குமென ஊகிக்கலாம்.

உதாரணமாக, ஒரு பெட்டியில் ஆயிரக்கணக்கான, ஒரே சீரான அளவு, எடை, பரிமாணம் உள்ள வெள்ளை, கறுப்பு, சிவப்பு நிற முள்ள உருண்டையான சலவைக்கற்கள் 1 : 1 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன என்று வைத்துக்கொள்வோம். அவைகளிலிருந்து ஒவ்வொரு தடவையும் ஒரு சலவைக் கல்லை எடுத்து, அதன் நிறத் தைக் குறித்துக்கொண்டு, உடனே அதைக் குதிரில் போட்டு, அவ்வப் போது நன்ருகக் குலுக்கி, மொத்தத்தில் முன்னூறு கற்களைத் தேர்ந்

தெடுத்து, உண்டாகும் மாதிரிக் கூறு, ஒவ்வொரு நிறங்களிலும் சற்றேறக் குறைய நூறு கற்களைப் பெற்றிருக்கும் என்று உறுதியாகக் கூறலாம்.

ஆணிகள், மறை ஆணிகள், செங்கற்கள் அல்லது கம்பிகள் இவைகளைத் தொழிற்சாலை உற்பத்திப் பெருக்க வெள்ளத்திலிருந்து ஒரு மாதிரிக் கூருக எடுக்கும்போது, அந்த மாதிரிக் கூறு கூடிய வரையில் இயைபிலா நிலையைப் பெற்றிருக்கும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. ஆனால், சமூக ஆராய்ச்சித் துறைகளில் இயைபிலாப் பண்பைச் சற்றுக் குறைந்த அளவில்தான் அடையமுடியும். ஏனெனில், மனித வர்க்கத்தைப் பரிசோதனைக்குள்ளாக்க சமூகம் எல்லாச் சமயங்களிலும் இடமளிக்காது. மேலும், மேற்கூறிய ஆராய்ச்சிகளில் பண்புக் கூறுகளைத் தொகுக்கும் முறைகள் மிகவும் சிக்கலானவை.

ஏராண்டம் மாதிரிக் கூறின் தேர்வு முறை

ஒரு முழுமைத் தொகுதி உண்மையான உறுப்புகளாலானவையாக யிருக்கலாம்; அல்லது கற்பனையால் உருவான முழுமைத் தொகுதியாகவுமிருக்கலாம்.

ஒரே சீரான, ஆறு சமமான முகங்களை (faces) உடைய ஒரு பகடையின் முகங்களில் முறையே, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களைக் குறிப்பிட்டு நிர்ணயிக்கவும். அதன் வீச்சுகளைப் பற்றிச் சிந்திக்கவும். ஒவ்வொரு வீச்சையும் ஒரு தனி நிகழ்ச்சியாகக் கொள்ளலாம். பகடை தேயாமல் இருக்கும் வரை, அதைக் கொண்டு இலட்சக் கணக்கான வீச்சுகளை உண்டாக்க முடியும். பகடையின் மூலம் உண்மையான வீச்சுகளை உண்டாக்காமலேயே, அந்தப் பகடையால் நிகழக்கூடிய எல்லா வீச்சுகளையும் ஒரு கற்பனை முழுமைத் தொகுதிக்கு ஒப்பிடலாம். ஆதலால், எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி, கற்பனையால் உருவாகக் கூடிய அநேக வழிகளில் ஒன்ருக நிகழ்கிறதோ, அந்தக் கற்பனை நிகழ்ச்சிகளின் கூடுதலுக்கு, **கற்பனை முழுமைத் தொகுதி** (Hypothetical Population) என்று பெயர்.

ஒரு பகடையை இலட்சம் தடவைகள் உருட்டி, பக்கங்களில் குறிப்பிட்ட எண்களின் எண்ணிக்கைகளைக் கவனித்தால், ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட எண்ணும், ஏறக்குறைய, இலட்சத்தில் ஆறில் ஒரு பாகமாக வரும். இந்த இலட்சம் நிகழ்ச்சிகளின் மொத்தம், ஒரு முழுமைத் தொகுதியாகும். அவைகளில் ஏதாவது ஆயிரம் நிகழ்ச்சிகள் ஓர் இயைபிலா மாதிரிக் கூருகும். ஆனால், உண்மையில் இலட்சக்கணக்கான வீச்சுகளை உண்டாக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. அவைகளை ஒரு கற்பனை முழுமைத் தொகுதியாகப் பாவித்து, உண்மையில் ஒரு சில பகடை வீச்சுகளை மட்டும் உண்டாக்கி, அவை

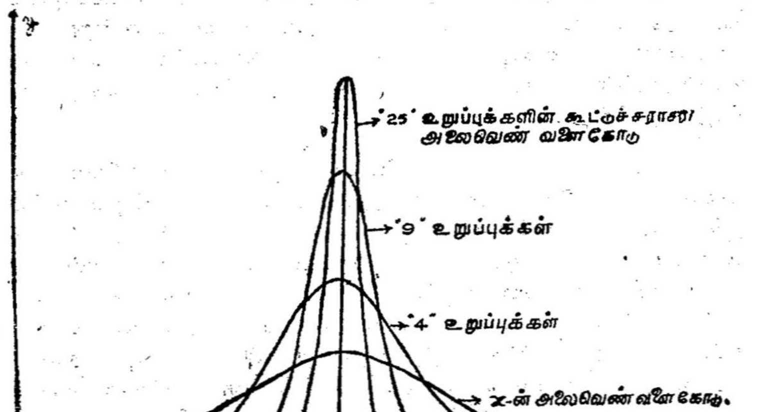
களின் மொத்த நிகழ்ச்சிகளை ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிக் கூறாகக் கருதலாம்.

இயைபிலா மாதிரிக் கூறுகளின் பிழை விளக்கம்

x என்னும் மாறி, ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் ஏதாவது ஒரு குணத்தைக் குறிக்கட்டும். அத் தொகுதியிலிருந்து x-ன் n மதிப்புகள் அடங்கிய k பண்புக் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்துப் பின் வருமாறு குறிப்பிடவும் :

1ஆவது மாதிரிக் கூறு : x_{11}, x_{12}, x_{13},..........................x_{1n}
2ஆவது மாதிரிக் கூறு : x_{21}, x_{22}, x_{23},..........................x_{2n}
....
k ஆவது மாதிரிக் கூறு : x_{k1}, x_{k2}, x_{k3},..................x_{kn}

இந்த x-ன் k_n மதிப்புகளைத் தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளைக் கையாண்டு, ஓர் அலைவெண் பாதையை வரைபடத்தாளில் வரையவும். x-ன் k_n மதிப்புகளெல்லாம், x-ன் மொத்தக் கூட்டிடை $\bar{\bar{x}}$ ஐச் சுற்றி முன்னும் பின்னுமாகப் பரவியிருப்பதைக் காணலாம். k மாதிரிக் கூறுகளின் கூட்டிடைகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை முறையே $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, ...$\bar{x}_k$ எனக் குறிப்பிடவும். இந்த k கூட்டிடைகளின் உள் வேற்றுமைகளையும், அவைகளின் $\bar{\bar{x}}$ மதிப்பிலிருந்து விலக்கப்பட்டிருப்பதையும் கவனிக்கவும். அதே வரைபடத்தாளில்,



படம்-4.4

$\bar{x}_r$ ($r = 1, 2, 3,$ ....k) ன் அலைவெண் பாதையை வரைந்து, x அலைவெண் பாதையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும். $\bar{x}_r$ ன் மதிப்

புகள் xன் மதிப்புகளைவிட, $\bar{x}$ஐச் சுற்றிலும் மிகவும் நெருக்கமாகப் பரவியிருப்பதைக் காணலாம். ஏனென்றால், பண்புக் கூறு தத்துவத்தின் அடிப்படை உண்மைகள், ஒழுங்கு விதியைச்சார்ந்து இருக்கிறது.

ஓர் ஒழுங்கு வளைவுப் பாதையின் சமன்பாட்டில், $\bar{x}, \sigma$ என்ற இரண்டு துணை அலகுகள் (Parameters) முறையே மையநிலைப் போக்கையும், $\bar{x}$ ஐச் சுற்றிலும் உள்ள சிதறல் நிலையையும் தெரிவிப்பனவாக உள்ளன.

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள பரவல்களின் மாற்ற நிலையை இன்னும் சற்று விரிவாகத் தெரிந்துகொள்ள, ஐந்து உறுப்புகள் அடங்கிய பண்புக் கூறு கூட்டிடைகளின் பரவலைக் கவனிப்போம். இக் கூட்டிடைகள் தனி உறுப்புகளைக் காட்டிலும், மொத்தக் கூட்டிடையைச் சுற்றி மிகவும் நெருங்கித் திரளாகக் குவிந்திருப்பதைக் காணலாம். ஏனெனில், உறுப்புகளின் தனி மதிப்புகள், ஒவ்வொரு பண்புக் கூறிலும் தற்செயலாக ஏற்பட்டிருப்பதனால், அவைகளில் சில மதிப்புகள் மொத்தக் கூட்டிடைக்குக் குறைவுபட்டோ, மேம்பட்டோ இருக்கின்றன. மேலும், இயைபிலா முறையைக் கையாண்டு மாதிரிக் கூறுகள் எடுக்கப்பட்டிருப்பதால், ஒவ்வொரு மாதிரிக் கூறிலும் அடங்கிய உறுப்புகள் எல்லாம், அளவுக்கு மீறிய மதிப்புகளைப் பெற்றிருப்பது மிகவும் அரிது. பண்புக் கூறில் அடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, அதன் கூட்டிடை, மொத்தக் கூட்டிடைக்கு மிக மிக அருகில் அமையும் என்று எதிர்பார்க்கலாம். அதாவது பண்புக் கூறு கூட்டிடைகளின் பரவல், தனி உறுப்புகளின் பரவலைவிட, குறைந்த திட்ட விலக்கத்தைப் பெற்றிருக்கின்றன.

பண்புக் கூறுகளில் அடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகளை, முறையே, 4, 9, 25 ஆக எடுத்து, அப் பண்புக் கூறு கூட்டிடைகளின் அலைவெண் பாதைகளை வரைந்து, தனி உறுப்புகளின் அலைவெண் பாதையுடன், ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், கூட்டிடைகளின் பரவல், மிக மிக நெருக்கமாக அமைந்திருப்பது புலப்படும். மேலும், பண்புக் கூறு கூட்டிடையின் திட்ட விலக்கம், பண்புக் கூறுகளில் அடங்கிய உறுப்பு எண்ணிக்கையின் வர்க்க மூலத்திற்கு மாறு விகிதத்தில் அமைந்திருக்கிறதென்றும் அறியலாம். தவிரவும், ஒவ்வொரு அலைவெண் பரவல் பாதையும், ஒழுங்கு அலைவுப் பாதையின் பண்பைத் தொடர்ச்சியாகப் பெற்றிருக்கிறது. ஆனால், பரவலின் திட்ட விலக்கம், பண்புக் கூறில் அடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் வர்க்க மூலத்திற்கு ஏற்றாற்போலக் குறைகிறது. சுருங்கச் சொன்னால், தனி உறுப்புகளின், திட்ட விலக்கத்தை σ ஆக எடுத்துக்கொண்டு, n உறுப்பு

களைக் கொண்ட பண்புக் கூறு கூட்டிடைகளின் திட்ட விலக்கத்தை σ_x என்று குறிப்பிட்டால், நமக்கு $\sigma_x \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ -ன் மதிப்பளவைக் கூட்டிடையின் திட்டப் பிழை என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

இயைபிலா மாதிரிக் கூறின் பிழைகள்

ஒரு மூல முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளின் மாறுபாடுகளி லிருந்து எழும்பி, மாதிரிக் கூறு கூட்டிடைகளின் மாற்றத்தின் வாயி லாக வெளிப்படுகின்றன. எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகளும் மொத்தக் கூட்டிடைக்குச் சமமாகயிருந்தால், மாதிரிக் கூறின் பிழைகள் சூன்யமாகி விடுகிறது. திட்டப் பிழையைக் கொண்டு பண்புக் கூறுப் பிழைகளின் பரவலை அறிவிக்க முடிகிறது. ஒரு மாதிரிக் கூறின் திட்டப் பிழை அதிகமானால், மாதிரிக் கூறுக்கு நேரிடும் பிழைகள் மொத்தத்தில் அதிகரிக்கின்றன. திட்டப் பிழை குறைவானால், மாதிரிக் கூறின் பிழைகள் குறைகின்றன.

தவிரவும், மாதிரிக் கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகு திக்குத் திட்டப்பிழை, குறைந்துகொண்டே வரும். ஏனெனில், திட்டப் பிழையானது, மாதிரிக் கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் வர்க்க மூலத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் அமைந்திருக்கிறது. ஆதலால் மாதிரிக் கூறிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்து, இயை பிலாப் பிழையைத் தக்கவாறு குறைக்க முடியும்.

பண்புக் கூறு கூட்டிடையின் திட்டப் பிழையை அளவிட்டது போல அதே தத்துவங்களைக் கொண்டு, திட்ட விலக்கத்தின் (σ-ன்) திட்டப் பிழையை $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ என்ற அளவாலும், உடன் தொடர்புக் கெழுவின் (r-ன்) திட்டப் பிழையை $\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ என்ற அளவாலும் அறியலாம்.

நமது தினசரி வாழ்க்கையில் அவ்வப்பொழுது மாதிரிக் கூறுகளி லிருந்து கிடைக்கக் கூடிய சான்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு தீர்ப் பளித்து வருகிறோம். நடைமுறையில் உபயோகிக்கும் மாதிரிக் கூறுகள் எல்லாம் இயைபிலா மாதிரிக் கூறுகளைப் போல நம்பிக்கைக்கு உகந்தவைகளா? அல்லது இயைபற்ற இலட்சியம் உண்மையில்

அடையக் கூடியதா ? என்ற வினக்கள் நம்முள் எழுவது இயல்பு. இவற்றிற்கு விடை காண ஒரு திட்டமான செயல்முறையைக் கையாண்டு, ஒரு மாதிரிக் கூறின் விளைவுகளைப் பற்றி இயைபிலாப் பிழைகளினுல் எவ்வளவு தூரம் விளக்க முடிகிறதென்று பரிசீலனை செய்கிருேம். இதற்கு விளைவுகளின் சிறப்புக் காணும் சோதனை என்று பெயர்.

எந்தெந்த விளைவுகள் இயைபிலாப் பண்புக் கூறின் பிழைகளைத் தழுவி அமையவில்லையோ, அந்தந்த விளைவுகளைப் புள்ளியியலாகக் குறிப்பிடத் தக்கவை என்று கருதுகிருேம்.

5% ஊக அளவு விதிப்படி, மாதிரிக் கூறு கூட்டிடைக்கும் ($\bar{x}$-க்கும்) முழுமைத் தொகுதி கூட்டிடைக்கும் (μ க்கும்) உள்ள வேறுபாடு, மாதிரிக் கூறு கூட்டிடையின் இரு மடங்குத் திட்டப் பிழைக்குக் $\left[\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ குறைவானுல், அந்த வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கவையல்ல என்றும், இரு மடங்குக்குச் சமமாகவோ அதிகமாகவோ இருந்தால், அந்த வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கவை என்றும் கூறலாம்.

ராண்டம் மாதிரிகளின் செயல் நுட்பம்

ஒரு மாதிரிக் கூறு இயைபற்ற நிலையைப் பெறுவது அதிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், மூல முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையையும் பொறுத்திருக்கிறது. ஒரு மூல முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகள் ஒரே தன்மையை உடையனவாகயிருந்தால், அதைப்பற்றி ஆராய்வதற்கு, இயைபிலா மாதிரிக் கூறு ஏதுவாகயிருக்கிறது. ஒரு மூல முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகள் நன்ருகக் கலக்கும் தன்மையைப் பெற்றிருந்தால், அவைகளிலிருந்து ஒரு மாதிரிக் கூறு ஒன்றை, ஒருபுறச் சாய்வற்ற (unbiased) முறையைக் கொண்டு தேர்ந்தெடுக்கலாம். சில சமயங்களில் உறுப்புகள் கலக்கும் தன்மையைச் சீராகப் பெருமல் இருக்கலாம். உதாரணமாக, மிக அதிகப் பளுவுள்ள உறுப்புகளை நன்ருகக் குலுக்கும்போது, மேலே வரயியலாது போகலாம். அல்லது, உறுப்புக்கள் அசைவற்ற நிலையில் இருக்கலாம். இந்தச் சமயங்களில் உறுப்புகளை எண்களினுல் குறிப்பிட்டு, இயைபிலா எண்ணியல் அட்டவணையைக் கொண்டு தகுந்த எண் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு மாதிரிக் கூறை எடுக்கும் பொழுது கையாளும் தேர்ச்சி முறையானது, முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளின் பண்புகளுக்குத் தனித்திருந்தால் (Independent),

அப் பண்புக் கூறுனது சம வாய்ப்பு அளித்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஓர் இயைபிலா மாதிரிக் கூறுக்கு இணையாகும்.

ஒரு நகரத்திலுள்ள வீடுகளையெல்லாம் அவைகளின் கதவு நிலை எண்களைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கலாம். அவைகளிலிருந்து ஒரு மாதிரிக் கூறை அமைக்க, ஏதாவது ஒரு கதவு நிலை எண் குறிப்பிடப் பட்டுள்ள வீட்டிலிருந்து, சம இடைவெளியுள்ள எண்களை விட்டு விட்டு, வரும் எண்களுக்குரிய வீடுகளைக் கணக்கிட்டால் போதுமானது. இவ்வாறு, ஒரே சீரான கால, இட அல்லது வரிசைத்தர இடைவெளிகள் நீங்கலாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் உறுப்புகள் ஓர் ஒழுங்குபட்ட மாதிரிக் கூறைச் (Systematic Sample) சாரும்.

படுகை மாதிரிக் கூறு அல்லது வரையறுக்கப்பட்ட மாதிரிக் கூறு (Stratified Sample)

பொருளியல் அல்லது சமூகத்தைச் சேர்ந்த ஆராய்ச்சிகளில் பொறிநுட்ப முறைகளை (Mechanical Methods) அடிப்படையாகக் கொண்டு இயைபிலா மாதிரிக் கூறைப் பெறுவது மிகவும் கடினமானது. உதாரணமாக, மனித வர்க்கத்தை எடுத்துக்கொண்டால், அவர்கள் இனம், வயது, ஜாதி, தொழில், அந்தஸ்து, மதம் ஆகியவற்றால் வேறுபட்டிருக்கிறார்கள். அதனால் ஒரு மாதிரிக் கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கும்பொழுது இவ் வேறுபாடுகளை மனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதி பலதரப்பட்ட உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், அந்த உறுப்புகளின் பண்புகளுக்குத் தக்கவாறு, படுகைகளை அமைத்து, ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ராண்டம் மாதிரித் தேர்வின் மூலம் உறுப்புகளை மூல முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள படுகைகளின் விகிதாசாரத்திற்கு ஏற்றவாறு தேர்ந்தெடுத்து அமைக்கப்படும் கூறுக்குப் படுகை மாதிரிக் கூறு என்று பெயர்.

உதாரணமாக, ஒரு கல்லூரியிலுள்ள மாணவர்களின் தேக நிலையைக் குறித்து ஆராய்ச்சி செய்யும்போது, மாணவர்களைக் கீழ்க் கண்ட படுகைகளுக்குத் தக்கவாறு பிரிக்கலாம் :

(i) வீட்டில் அல்லது மற்ற இடங்களில் வசிப்பதற்கு ஏற்றவாறு;

(ii) தன்னைத் தானே ஆதரித்துக்கொள்ளும் நிலை அல்லது பிறர் தயவில் வாழ்தல் அல்லது இவ்விரு வகைகளிலும் ஆதரவு பெறுவதற்கேற்றவாறு;

(iii) உடற்பயிற்சி செய்தல், செய்யாமைக்கு உகந்தவாறு;

(iv) லாகிரிப் பொருள்களைப் பயன்படுத்துதல் அல்லது பயன் படுத்தாமலிருப்பதற்கு ஏற்றவாறு.

பலநிலை மாதிரிக் கூறு

சில சமயங்களில் ஒரு மூலப் பொருளையோ, உற்பத்தி செய்யப் பட்ட பொருளையோ சோதனை செய்யும்பொழுது, பணச் செலவும் பொருட் சேதமும் ஏற்படலாம். அச் சமயங்களில் ஒரு சில பொருட் களையே சோதனைக்குட்படுத்தி, அதன் மூலம் முழுமைத் தொகுதி யைப்பற்றி ஊகிக்கலாம். இருபடி மாதிரிக் கூறின் (Double Sampling) மூலம் ஒரு சிறிய மாதிரிக் கூறை முதலில் சோதனைக் குட்படுத்தி, அதன் விளைவு மிகச் சிறந்ததா அல்லது தாழ்ந்ததா என்று ஆராய்ந்து, முழுமைத் தொகுதியில் அடங்கிய உறுப்புகள் அனைத்தையும் ஏற்றுக்கொள்ளவோ, நிராகரிக்கவோ செய்கிறோம். அதன் விளைவு இடைநிலை வகிப்பதாகில், மறு முறையாக ஒரு மாதிரிக் கூறையெடுத்து அவ்விரு மாதிரிக் கூறுகளின் ஆதாரத்தைக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியை ஏற்கவோ நிராகரிக்கவோ முடி கிறது.

பலநிலை மாதிரிக் கூறு இத் தத்துவத்தை மேற்கொண்டு முன்னரே உறுதி செய்யப்பட்ட ஒரு சில மாதிரிக் கூறுகளின் சோதனைக்குப் பிறகு முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் எல்லாவற்றையும் ஏற்றுக் கொள்ளவோ, நிராகரிக்கவோ உதவி புரிகிறது.

படிப்படி மாதிரிக் கூறு

சோதனைக்குட்படுத்தக்கூடிய உறுப்புகளின் பெருமத்தை முன்னமேயே நிர்ணயிக்காமல், அவ்வப்பொழுது உறுப்புகளை ஒவ் வொன்றாகச் சேர்த்து, ஒரு குறிப்பிட்ட திட்டமான அளவு வரும் வரையில் சோதனையைத் தொடர்ந்து நடத்தி, அடையக் கூடிய உறுப்புகளின் கூடுதலுக்குப் படிப்படி மாதிரிக் கூறு என்று பெயர். இம் மாதிரிக் கூறினால், சோதனைக்கு உட்படுத்தப்பட்ட உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்க ஏதுவாகிறது.

மறுக்கத்தகு எடுகோளும் அதன் சோதனையும் (Null Hypothesis and Testing of Hypothesis)

சிறப்புக் காணும் சோதனையைப் பற்றி முன்னமேயே கூறி இருக்கிறோம். ஓர் சோதனையில் ஓர் எடுகோளை முதலிலேயே அமைத்துங்கூடப் பரிசீலனையைச் செய்யலாம்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட N எண் ணிக்கையுள்ள x மாறியின் மதிப்புகள் ஒரு பண்புக் கூறாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டிருக்கிறது என்று வைத்துக்கொள்வோம். $\bar{x}$, μ என்பன முறையே மாதிரிக் கூறு, முழுமைத் தொகுதி கூட்டிடைகளைக் குறிக்கட்டும். இம் மாதிரிக் கூறை, ஒரு முழுமைத்

தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஓர் இயைபிலா மாதிரிக் கூருக பாவிக்கும் ஓர் எடுகோளை அமைப்போம். பிறகு இவ்விரு கூட்டிடைகளின் வேறுபாட்டைப்போல் அவ்வளவு பெரிதான ஒரு வேறுபாடு வாய்ப்புக் காரணக் கூறுகளால், ஓர் இயைபிலா மாதிரிக் கூறு அமைத்தலிலிருந்து ஏற்பட்டிருக்கக்கூடும் என்று அவ் வேறுபாட்டின் ஊக அளவைக் கணக்கிடுகிறோம். எடுகோளை ஐயப்படுமளவுக்கு அவ் வேறுபாடு ஏற்பட்டிருக்கிறது என்று அவ் வேறுபாட்டின் ஊக அளவைத் தெரிவித்தால், எடுத்துக்கொண்ட எடுகோளை நிராகரித்து விடுகிறோம். அதாவது மாதிரிக் கூறின் கூட்டிடை, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடைக்குக் குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபாட்டைப் பெற்றிருக்கிறது என இச் சோதனை மூலம் தீர்மானிக்கலாம்.

நம் சோதனை, எடுத்துக் கொண்ட எடுகோளை, ரத்து செய்வதை மேற்கொண்டிருக்கிற காரணத்தால், அவ் வெடுகோளை **மறுக்கத்தகு எடுகோள்** என்று கூறுகிறோம்.

இச் சோதனையில் எடுகோளானது சரியா, தவரு என்று நிரூபிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால், நமது ஊகம் அதன்மேல் அதிக ஐயங்கொண்டு அதை மறுக்கிறது; அல்லது அதன்மேல் சிறிதளவும் ஐயங் கொள்ளாமல் அதை ஏற்கிறது.

எப்பொழுது ஒரு வேறுபாடு வாய்ப்பினுல் எழும்பியிருப்பதற்குப் பொருத்தமற்றதோ, அந்த வேறுபாட்டை நாம் புள்ளியியலாகக் குறிப்பிடத்தக்கவை என்று சொல்லுகிறோம். இதனுல் அவ்வேறுபாட்டைத் தற்செயலாக நிகழ்ந்தது என்று காரணமாகக் குறிப்பிடுவது நம்பத்தகாததாயும், நம் பகுத்தறிவினுல் அவ் வித்தியாசத்தை ஓர் உண்மையான வேறுபாடாகவும் கருதுகிறோம்.

மேற் சொன்ன தீர்மானமானது, முழு உறுதி நிலைக்குச் சற்றுக் குறைவுபட்டு, ஊக அளவையை அடிப்படையாகக் கொண்டிருப்பதால், ஏற்படும் உண்மையான வேறுபாட்டை அதன் ஊகஅளவைக்கு உகந்தவாறு குறிப்பிடத்தக்கவையல்ல வென்றும், குறிப்பிடத்தக்கவையென்றும், அல்லது மிகக் குறிப்பிடத்தக்கவை யென்றும் வெளியிடுகிறோம். ஏற்படும் வித்தியாசத்தின் ஊக அளவை P எனக் கொண்டு $P > 0{\cdot}05$ என்று ஏற்படும் சமயத்தில், அவ்வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதல்ல என்றும், $p \leqslant 0{\cdot}05$ என்று ஏற்படும்பொழுது, அவ் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கது என்றும், $P \leqslant 0{\cdot}01$ என்று எப்பொழுது ஏற்படுகிறதோ, அப்பொழுது அவ் வேறுபாடு மிகக் குறிப்பிடத்தக்கது என்றும் தீர்மானிக்கிறோம்.

ஒரு சாதாரண மனிதன், மேற்சொன்ன விதிகளைப்பற்றி அறிந்து கொள்ளுவதற்கு, அவ் வித்தியாசம் தூய்மையான வாய்ப்பினால் 20 முயற்சிகளுக்கு ஒரு தடவை ஏற்படுமானால் அவ் வித்தியாசத்தைக் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல என்றும், 100க்கு ஒரு தடவை ஏற்படுமானால் குறிப்பிடத்தக்கதென்றும், 1,000க்கு ஒரு தடவை ஏற்படுமானால் மிகக் குறிப்பிடத்தக்கதென்றும் கொள்ளவேண்டும்.

மதிப்பிடுதலும் நம்பிக்கை இடைவெளியும் (Estimation and Confidence Interval)

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று மதிப்புகளில் வித்தியாசப் படுவதாலும், பண்புக் கூறில் அடங்கிய உறுப்புகள் வாய்ப்பு அல்லது கட்டுப்பாடில்லாத காரணங்களால் வசப்பட்டிருப்பதாலும், மாதிரிக் கூறிலிருந்து, 'கிடைக்கக் கூடிய உண்மைகள்' (Observed Facts) — அதாவது மாதிரிக் கூறின் கூட்டிடை, திட்ட விலக்கம் முதலியன — முழுமைத் தொகுதியின் உகந்த 'மெய்யான துணை அலகுகளுக்கு' (True Parameters) அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடை, திட்டவிலக்கம் முதலியன — பெரும்பாலும் அளவில் சிறிது வித்தியாசப்பட்டிருக்கும். ஆதலால், மாதிரிக் கூறிலிருந்து 'கிடைக்கக் கூடிய உண்மைகள்' அப்படியே முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய 'மெய்யான பண்புகளை' முற்றிலும் விவரிக்குமென எதிர்பார்க்க முடியாது. ஆனால், மாதிரிக் கூறிலிருந்து 'கிடைக்கக்கூடிய உண்மைகளை' முழுமைத் தொகுதியின் 'தூய்மையான துணை அலகுகளின்' மதிப்பீடுகளாகக் (Estimates) கருதலாம். அவைகள் எந்த அளவுக்குச் சிறந்த மதிப்பீடுகளாக ஏற்படுகின்றன என்று நம்பிக்கை வைப்பதற்குச் சில விளக்கங்கள் தேவை.

புள்ளியியலாக மதிப்பீடுகளின்மேல் வைக்கும் நம்பிக்கைத் தரம், மாதிரிக் கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையுடனும், பரிசீலனைக்கு எடுத்துக்கொண்ட மாதிரிக் கூறு மாறியின் திட்டப் பிழையுடனும் பிணைக்கப்பட்டிருக்கிறதென்று அறியலாம். அந்தப் பண்புக் கூறு மாறி எவ்வளவு தூரம் மதிப்பீடாக மெய்யான துணை அலகு மாறியிலிருந்து விலக்கப்பட்டிருக்கிறது என்று, ஊக அளவைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்பட்டிருக்கும் நிறையுடன்

μ – ன் நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\bar{x} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \bar{x} \qquad \bar{x} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(with the Range Determined by Probability) பெரும்பாலும் குறிப்பிடப்படுகிறது. இந் நிறைக்கு 'நம்பிக்கை இடைவெளி' என்று பெயர்.

5% ஊக அளவு மூலம், பண்புக் கூறு கூட்டிடை ($\bar{x}$), முழுமைத் தொகுதி கூட்டிடை (μ)-ன் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் அதன் திட்டப்பிழையின் இரண்டு மடங்கிற்குள் அடங்கி இருக்கிறது. முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடையை; பண்புக் கூறு கூட்டிடை மதிப்பிடுகிறது எனக் கொண்டால், μ - ஆனது, 100க்குத் தொண்ணூற்றைந்து தடவைகளுக்கு மேல் $\left[\bar{x}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ என்ற இடைவெளிக்குள் அடங்கியிருக்கும். இந்த இடைவெளிக்கு 'μ-ன் நம்பிக்கை இடைவெளி' என்று பெயர். இம் மாதிரியே முழுமைத் தொகுதியின் மற்றத் துணை அலகுகளின் நம்பிக்கை இடைவெளிகளையும், 5% ஊக அளவுக்கு உகந்தவாறு நிர்ணயிக்கலாம்.

மாதிரிக் கூறின் குறைகள் :

ஒரு மாதிரிக் கூறு எவ்வாறு முழுமைத் தொகுயைப் பற்றிய உண்மைகளைத் தெரிவிக்கிறது என்று இதுவரை கவனித்தோம். இப்பொழுது மாதிரிக் கூறின் குறைகளைப் பற்றிப் பரிசீலனை செய்வோம்.

மாதிரிக் கூறில் அடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை வரையறுக்கப்பட்டிருப்பதால், அவைகளைக் கொண்டு கிடைக்கும் செய்திகளும் வரம்புக்குட்பட்டவைகளே. மேலும், பெரும்பாலான எல்லா ஆராய்ச்சிகளும் உறுதியானவைகளல்ல. புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிக்குப் பிறகு கிடைக்கக்கூடிய அனுமானங்கள் ஏற்கனவேயே வெளிப்பட்ட செய்திகளாக இருக்கலாம். ஆராய்ச்சிக்கு எடுத்துக் கொண்ட செய்திகளை முன்கூட்டியே அறியாத காரணத்தால், அவை புள்ளியியலாளருக்கு, ஒரு முட்டுக்கட்டையாக இருக்கின்றன. முன்கூட்டியே தகவல் கிடைக்காத காலங்களில் அவைகளை ஒரு 'முன்னோடிக் கணக்கீடு' (Pilot Scheme) மூலம் நிவர்த்தி செய்வது மிகவும் நல்லது.

நடைமுறைச் சிக்கல்களில், சிறப்புக் காணும் சோதனையை அடிப்படையாகக் கொண்டு, முற்றிலும் உண்மையான ஒரு முடிவுக்கு வருவது இயலாத காரியம். ஆதலால், நடைமுறையாக ஏற்படுபவைகளுக்கு முதலிடம் அளிக்கப்படவேண்டும். நம்பிக்கை எல்லைகள் ஊகமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவைகளேயன்றி, அவை பொருளாதார, நடைமுறைகளைத் தழுவியிருக்குமென்று எப்பொழுதும் கூறமுடியாது. ஒருபுறச் சாய்வை அகற்றுவதென்பது ஒரு குறிக்கோள் நெறியே தவிர, நடைமுறையில் அதை அடைவது மிகவுமரிது.

மாதிரிக் கூறின் அளவெடுப்புகள்
(Sampling Surveys)

செயல் முறையின் சுருக்கம்

புள்ளியியல் கணக்கெடுப்புகளைப் பின் கண்ட திட்டப்படி அமைக்கலாம் :

1. கணக்கெடுக்கும் பிரச்சினையைப் பற்றிய ஒரு பொதுவான திட்டத்தைத் (General Plan) தயாரித்தல்.

2. தகுந்த வினாக்களைத் தொகுத்து ஒரு பட்டியல் (Schedule) தயாரித்தல்.

3. மாதிரிக் கூறு தேர்ந்தெடுக்கும் முறையை நிர்ணயித்தல்.

4. பட்டியலை உபயோகித்து, விவரங்களைச் சேகரித்தல்.

5. பட்டியல்களைப் பதிவு செய்தல்.

6. விவரங்களைத் தொகுத்து, அவைகளை அட்டவணைகள் மூலம் வெளிப்படுத்தல்.

7. பாகுபாடு செய்தலும், அதை விளக்கிப் பொருள் கூறலும்.

மேற்கூறிய திட்டங்களின்படி, ஒரு நகரத்திலுள்ள எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்களின் மாதிரிக் கூறு அளவெடுப்பை ஆராய்வதற்கு, (i) அந் நகரத்தின் எல்லைக்குள் அடங்கிய மக்கள் தொகையை மதிப்பிடவேண்டும். (ii) கணக்கெடுப்பை முடிப்பதற்கு உத்தேசமாக ஆகும் காலத்தையும், பணச் செலவையும், கணக்கெடுப்பவர்களின் எண்ணிக்கையையும் முன்னமேயே சற்று ஏறக் குறைய தீர்மானித்துக் கொள்ளவேண்டும். இந்த ஆராய்ச்சியில் கணிப்பாளர்கள், ஒவ்வொரு வீடாகச் சென்று பேட்டி கண்டு, பட்டியலைப் பூர்த்திசெய்வது நலம்.

வினாத்தொகுதியின் பட்டியல்

1. (a) நகரத்தின் பெயர்
   (b) வார்டு எண்
   (c) வீட்டெண்

2. (a) தகவல் தெரிவிப்பவர் பெயரும் அவருக்கும் குடும்பத் தலைவருக்கும் உள்ள உறவு.
   (b) முகவரி (Address)

3. வயது

4. பால் (ஆண் அல்லது பெண்)

5. தாய் மொழி

6. தாய்மொழியில் தன் பெயரை எழுதத் தெரிந்தவரா ?

7. மொழிகள் —
பேசத் தெரிந்தவை, படிக்கத் தெரிந்தவை, எழுதத் தெரிந்தவை.
(a)
(b)
(c)
(d)

8. கல்வி அறிவு பெற்ற விவரம்.

கல்வி கற்ற பள்ளியின் வகை	பள்ளியில் நுழையும் பொழுது வயது	ஒவ்வொரு பள்ளியிலும் கல்வி பயின்ற காலம்	நற்சாட்சிப் பத்திரம், பட்டம், பல்கலைக் கழகப் பட்டச்சான்றுப் பத்திரம் கொடுக்கப்பட்டதன் விவரம்
ஆரம்பப் பள்ளி நடுத்தரப் பள்ளி உயர்நிலைப் பள்ளி கல்லூரி ஆராய்ச்சி நிலையம்			

9. சிறுவயதில் முறைப்படி கல்வி கற்காமல், முதியோர் கல்வி பயின்றவரா?

10. பெற்றோர்களின் அந்தஸ்து

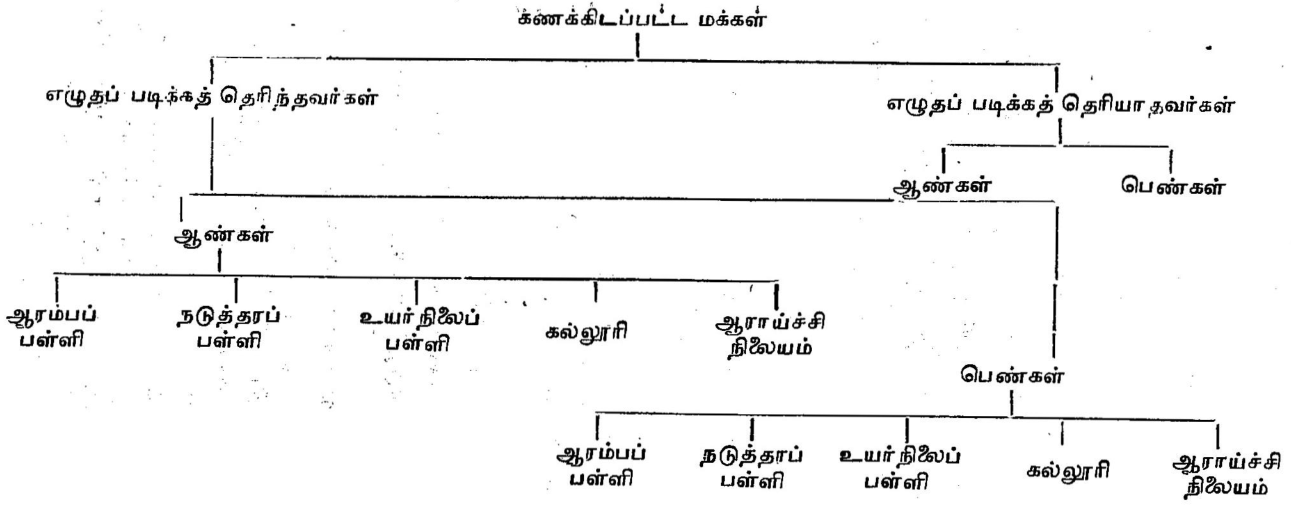
11. பெற்றோர்கள் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்களா ?

12. பெற்றோர்கள் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவராயின், அவர்கள் கல்வி பயின்ற விவரம்.

13. இருப்பிடத்திற்கு அருகில் கல்வி நிலையங்கள் உள்ளனவா ?

நகரத்தின் மொத்த மக்கள் தொகைக்கு உகந்தவாறு மாதிரிக் கூறின் உறுப்புகளை நிர்ணயிக்க வேண்டும். பிறகு ஓர் ஒழுங்கு பட்ட வீடுகளிலுள்ள நபர்களின் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்த விவரத்தை அறிந்துகொண்டால் போதுமானது.

கணக்கெடுப்பவர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு வீட்டிற்கும் நேராகச் சென்று, அங்குள்ளவர் ஒவ்வொருவரின் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்த விவரங்களை வினாத்தாளில் பதிவு செய்வதால், உண்மைத் தகவலை அறிந்து, பட்டியலைப் பூர்த்திசெய்ய முடிகிறது. பூர்த்தி செய்யப்பட்ட பட்டியல்களைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணை மூலம் அறிவிக்கலாம்.


கணக்கிடப்பட்ட மக்கள்
எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்கள்
எழுதப் படிக்கத் தெரியாதவர்கள்
ஆண்கள்
பெண்கள்
ஆண்கள்
ஆரம்பப் பள்ளி
நடுத்தரப் பள்ளி
உயர் நிலைப் பள்ளி
கல்லூரி
ஆராய்ச்சி நிலையம்
பெண்கள்
ஆரம்பப் பள்ளி
நடுத்தரப் பள்ளி
உயர் நிலைப் பள்ளி
கல்லூரி
ஆராய்ச்சி நிலையம்

மேற்கூறிய அட்டவணையிலிருந்து மாதிரிக் கூறிலுள்ள ஆண்கள், பெண்கள் இவர்களில் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர், தெரியாதவர்களின் சதவீதங்களையும், மற்றப் புள்ளி விவரங்களையும் கணக்கிட முடியும். மாதிரிக் கூறு மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கொண்டு நகரத்திலுள்ள மொத்த மக்களுக்குரிய சதவீதங்களை மதிப்பிடலாம்.

14. மாதிரிக்கூறின் பரவல்கள்
(Sampling Distribution)

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிக்கூறு எடுத்தலின் வகைகளை முன்பே அறிவோம். மாதிரிக் கூறுகளில் அடங்கிய உறுப்புகளின் தன்மைகளை ஆராய்ந்து, முழுமைத் தொகுதியி லடங்கிய உறுப்புகளின் தன்மைகளை அறிகிறோம். மாதிரிகளில் அடங்கிய உறுப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், உடன் தொடர்புகெழு ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் கூறின் அளவை (Sample Statistic) எனக் கொள்வது வழக்கம். இவைகளை நேரிடை யாகவே கணக்கிட முடியும். ஆனால், முழுமைத் தொகுதியிலடங்கிய எல்லா உறுப்புகளையும் பரிசீலனை செய்ய முடியாத காரணத்தால், முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளான (Population Parameters) கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், உடன் தொடர்புக் கெழு முதலிய வற்றை அளவிட்டுக் கூறமுடியாது எனவே, முழுமைத்தொகுதியின் அளவையை மாதிரிக்கூறின் அளவையிலிருந்து அறிய முயலு கிறோம். அப்போது, மாதிரிக்கூறின் அளவையை, முழுமைத் தொகுதி அளவையின் மதிப்பீடாகக் கருதி, அம்மதிப்பீட்டின்மேல் வைக்கும் நம்பிக்கைத் தரத்தை ஊக அளவையின் வாயிலாகத் தெரி விப்பது வழக்கம். இதற்காக, நாம், முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகள், ஒழுங்கு நியதிக்குக் கட்டுப்பட்டு இயங்குகின்றன என்று மேற்கொள்ளுகிறோம்.

எனவே, x என்பது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஏதாவதொரு அளவிடும் பண்பைக் குறித்தால், x மாறியின் பரவலமைப்பு இயல் நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கும். x-ன் இயல்நிலை வளைகோட்டை, N, m, σ (உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை, முழுமைத் தொகுதியின் கூட் டுச் சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்) என்பவை வரை யறுக்கின்றன. இம்மூன்று (N, m, σ) நமக்குத் தெரியாத அளவை களே. ஆனால், x மாறியின் n மதிப்புகளடங்கிய ஒரு மாதிரிக் கூறை, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்து, நேரிடையாக அள

விடுவதால், நமக்குத் தெரிவதெல்லாம் மாதிரிக்கூறின் அளவைகளான எண்ணிக்கை (n), கூட்டுச் சராசரி ($\bar{x}$), திட்ட விலக்கம் (s) முதலியன. எனவே, கூறின் அளவையிலிருந்து, முழுமைத் தொகுதியின் அளவையை மதிப்பீடு செய்ய, கணித முறையைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

x-ன் n மதிப்புகளடங்கிய k மாதிரிக் கூறுகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுப்பதாகக் கொள்வோம். $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \ldots \bar{x}_k$; $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \ldots \sigma_k$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_k$ என்பன முறையே k மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், உடன் தொடர்புக் கெழுக்களைக் குறிக்கட்டும்.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_k$ என்பனவற்றை முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி (m)ன் k மதிப்புகளாகக் கொள்ளலாம். இவைகளைத் தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்டு, ஓர் அலைவெண் பரவலாக அமைத்திடலாம். இப் பரவலமைப்புக்கு **மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரியின் பரவலமைப்பு** (Sampling distribution of the Arithmetic mean) எனப் பெயர்.

x-ன் k_n மதிப்புகளுக்குகந்த பிரிவு இடைவெளிகளையமைத்து, x-ன் அலைவெண் வளைகோட்டை வரைந்தால், இவைகள் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 'm' ஐச் சுற்றி முன்னும் பின்னும் விரிவாகப் பரவியுள்ளதைக் காணலாம். மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிப் பரவலின் அலைவெண் வளைகோட்டையும் வரைந்து, x மாறியின் வளைகோட்டுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிகள், 'm' - ஐச் சுற்றிலும் சற்று நெருக்கமான பரவலைப் பெற்றிருத்தலைக் காணலாம். x மாறியின் அலைவெண் வளைகோடு இயல்நிலை வளைகோட்டின் அமைப்புக்கு ஏறத்தாழ ஒத்திருக்குமானால், மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரியின் பரவல் x-ன் பரவலைவிட, மாதிரிக் கூறுகளிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை உயர்த்திக் கொண்டு செல்லும்போது, இயல்நிலைப் பரவலமைப்பை முற்றிலும் பெற்றிருக்கும் எனக் கூறமுடியும். x மாறியின் அலைவெண் வளை கோடு இயல்நிலை வளைகோட்டிற்கு ஒத்திருக்காவிட்டாலும், மாதிரிகளிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 50-க்கு மேல் வரும்போது, மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரியின் இறுதிப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்திருக்கும் எனவும் கூறமுடியும்.

கூட்டுச் சராசரி ('m')-க்குரிய பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை, 'm-ன் திட்டப் பிழை' எனக் கூறுகிறோம். இதை σ_m எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

இவ்விதமே திட்ட விலக்கத்திற்குரிய (σ-க்குரிய) பரவலின் திட்ட விலக்கத்தை, 'σ-ன் திட்டப் பிழை' எனக் கூறுகிறோம். இதை σ_σ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

மேலும் m-ன் திட்டப் பிழையை $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ எனவும்,

σ-ன் ,, ,, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{2n}}$,,

r-ன் ,, ,, $\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$,,

கொள்கிறோம்.

இயல்நிலை நிகழ்திற வளைகோட்டிற்குள் வரும் மொத்தப் பரப்பு ஒன்று என்றும், 100க்கு 95 நிகழ்ச்சிகள் $(-1{\cdot}96, +1{\cdot}96)$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளைப் பெறும் என்றும், 100க்கு 99க்கு மேல் நிகழ்ச்சிகள் $(-3, +3)$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்புகளைப் பெறும் என்றும் முன்பே அறிவோம். எனவே, $P(-1{\cdot}96 \leqslant t \leqslant 1{\cdot}96) = P(\,|t| \leqslant 1{\cdot}96) = {\cdot}95{\cdot}$

ஆதலால், எப்போது நிகழ்ச்சிகளின் மதிப்புகள் $(-1{\cdot}96, 1{\cdot}96)$ பிரிவு இடைவெளிக்கப்பால் வருகின்றனவோ அப்போது அதன் ஊக அளவை ·05 அல்லது அதற்குக் கீழ் மதிப்பினைப் பெறுகிறது. எனவே, 100க்கு 5 நிகழ்ச்சிகள்தான் $(-1{\cdot}96, 1{\cdot}96)$க்கப்பால் மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன என்றறியலாம். இந்த 5% ஊக அளவையை மேற்கொண்டே சிறப்புக் காணும் சோதனைகள் புள்ளியியலில் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

x மாறியின் நம்பிக்கை (எல்லைகள்) இடைவெளி

$\bar{x}$, σ என்பன x-ன் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் குறிக்கட்டும். x_r என்பது x-ன் ஏதாவதொரு மதிப்பைக் குறிக்கட்டும்.

5% ஊக அளவுப்படி

$$P(\,|x_r - \bar{x}| > 1{\cdot}96\,\sigma\,) < {\cdot}05.$$

என்வே, 95% நிகழ்ச்சிகள் $(\bar{x} - 1{\cdot}96\sigma,\ \bar{x} + 1{\cdot}95\sigma)$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்பினைப் பெறும்.

இப் பிரிவு இடைவெளியைத்தான் நாம் x-ன் நம்பிக்கை இடைவெளி எனக் கூறுகிறோம்.

கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை (எல்லைகள்) இடைவெளி

m என்பது முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி. $\bar{x}$ மாதிரிக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி. $\bar{x}$, m-ஐ மதிப்பீடு செய்கிறது.

$\bar{x}$-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

5% ஊக அளவுப்படி $P\left[\,|\bar{x} - m| > 1{\cdot}96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] < 0{\cdot}05$

எனவே, 100க்கு 95 தடவைகள் முழுமைத்தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\left[\bar{x} - 1{\cdot}96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + 1{\cdot}96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்பினை ஏற்கும்.

இப் பிரிவு இடைவெளியையே, நாம் 'm'-ன் நம்பிக்கை இடைவெளி எனக் கூறுகிறோம்.

திட்ட விலக்கத்தின் நம்பிக்கை எல்லைகள் (இடைவெளி)

σ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கமாகும். s என்பது மாதிரிக் கூறின் திட்ட விலக்கமாகும்.

s, σ-ஐ மதிப்பீடு செய்கிறது. σ-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{s}{\sqrt{2n}}$

இங்கு n என்பது மாதிரிக் கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

5% ஊக அளவுப்படி

$$P\left[\,|s - \sigma| > 1{\cdot}96\,\frac{s}{\sqrt{2n}}\right] < 0{\cdot}05.$$

எனவே, 100க்கு 95 தடவைகள் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம், $\left[s - 1{\cdot}96\,\dfrac{s}{\sqrt{2n}},\ \ s + 1{\cdot}96\,\dfrac{s}{\sqrt{2n}}\right]$ என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் மதிப்பினை ஏற்றும் என்று நம்பிக்கையாகக் கூறலாம்.

இப் பிரிவு இடைவெளியைத்தான், நாம் 'σ-ன்' நம்பிக்கை இடைவெளி எனக் கூறுகிறோம்.

சில சிறப்புக்காணும் சோதனைகள்

இங்கு மாதிரிக் கூறுகளில் உறுப்புகள் 30-க்குமேல் வருவதாகக் கொள்வோம்.

(1) நேரிடையாகக் கண்ட ஏதாவதொரு உறுப்பின் மதிப்பிற்கும், கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் அதன் மதிப்பிற்கும் உள்ள வேற்றுமையினை ஆய்தல்

x மாறி ஏற்கும் ஏதாவது n மதிப்புகளை அளவிட்டு, அவைகளை $x_1, x_2, \ldots x_r, \ldots x_n$ எனக் கொள்ளவும். இங்கு x-ன் n மதிப்புகள் 'ராண்டம்' மாதிரித் தேர்வின்மூலம் ஒழுங்கு நியதிக்குக் கட்டுப்பட்டு நடக்கும் ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதென ஓர் எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம்.

கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை 'm' எனக் கொள்ளவும். எனவே, நாம் பரிசோதிக்க முயலுவது x_r, m இவைகளுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்க அளவிலுள்ளதா அல்லது இல்லையா என்பதாகும். இதனை அறிய x_r-ன் மதிப்பைத் தரப்படுத்த வேண்டும். அப்போது $t = \dfrac{x_r - m}{\sigma}$ என்றாகும். (இங்கு σ என்பது முழுமைத் தொகுதியில் x-ன் திட்ட விலக்கம்). t-ன் மதிப்பு $(-1{\cdot}96, 1{\cdot}96)$ இடைவெளிக்குள் வருமானால், x_r க்கும் m-க்குமுள்ள வேற்றுமை 100 க்கு 95 தடவைகள் $1{\cdot}96\,\sigma$ க்குக் குறைவுபட்டதென்றும், 100 க்கு 5 தடவைகளே இவ் வேற்றுமை $1{\cdot}96\,\sigma$ க்கு அதிகப்பட்டதென்றும் இயல்நிலைப் பரவலமைப்பின் ஊக அளவையின்மூலம் அறிகிறோம். எனவே, எப்போது இவ் வேற்றுமை $1{\cdot}96\,\sigma$ க்குமேல் வருகிறதோ, அப்போது அதைப் புள்ளியியலில் குறிப்பிடத்தக்கதென்றும், $1{\cdot}96\,\sigma$ க்குக் கீழ் வரும்போது அவ் வேற்றுமையைக் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும் கொள்கிறோம்.

ஆதலால், 5% ஊக அளவுப்படி, t-ன் வெறும் மதிப்பை (அதாவது $|t|$ மதிப்பை)க் கணக்கிட்டு, அது 1·96 அல்லது அதற்குக் கீழ் மதிப்பினைப் பெற்றால், வேற்றுமையைக் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும், 1·96 க்குமேல் மதிப்பினைப் பெற்றால், வேற்றுமையைக் குறிப்பிடத்தக்கதெனவும் கொள்ளவேண்டும். அல்லது எடுத்த எடுகோளை முறையே ஏற்கிறோம் அல்லது மறுக்கிறோம்.

மாதிரிக் கணக்கு

(1) ஒரு நாணயத்தை 400 முறைகள் சுண்டினதில் 245 முறைகளில் தலைகள் வந்தன. 5% ஊக அளவைக் கோட்பாட்டின்படி, நாணயம் ஒரு புறச் சாய்வுடையதா எனப் பரிசோதிக்கவும்.

முதலில் நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வற்றது எனக் கொள்வோம்.

எனவே, ஒரு சுண்டுதலில், தலை வருவதற்குரிய ஊக அளவு $= \frac{1}{2}$.

ஆதலால், 400 சுண்டுதலில், தலைகள் இயல்பாக வரத்தக்க எண்ணிக்கை $= n \cdot p$

$$= 400 \times \frac{1}{2} = 200.$$

நேரிடையாக வந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை $= 245$. எனவே, தரப்படுத்தப்பட்ட மாறி,

$$t = \frac{x_r - m}{\sigma} = \frac{x_r - m}{\sqrt{npq}}$$

$$= \frac{245 - 200}{\sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{45}{10} = 4 \cdot 5.$$

இங்கு $t = 4 \cdot 5 > 1 \cdot 96$ என்று வருவதால், நேரிடையாக வந்த தலைகளுக்கும், இயல்பாக வரத்தக்க தலைகளுக்குமுள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதெனக் கொள்ளவேண்டும். அல்லது மேற்கொண்ட எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது.

எனவே, இங்கு நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வைப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறலாம்.

2. ஒரு நாணயத்தை 76 தடவைகள் சுண்டினதில் 32 தடவைகள் தலைகள் வந்தன. நாணயத்தின் தன்மையைப் பரிசோதிக்க.

இங்கு நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வற்றது எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $m = np = 76 \times \frac{1}{2} = 38$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{76 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{19}$$

$x_r =$ நேரிடையாக வந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை $= 32$

$m =$ கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை $\Big\} = 38$

எனவே, $t = \dfrac{x_r - m}{\sqrt{n\,pq}} = \dfrac{32 - 38}{\sqrt{19}} = -\dfrac{6}{\sqrt{19}} = -1{\cdot}3$

இங்கு $|t| = |-1{\cdot}3| = 1{\cdot}3 < 1{\cdot}96$ என்று வருவதால், நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வற்றது எனக் கொண்ட எடுகோளை ஏற்கிறோம்.

3. ஒரு பையிலுள்ள 1,000 ஒரு ரூபாய் நாணயங்களைத் தரையில் கொட்டிப்பார்த்ததில், 472 நாணயங்களில் தலைகள் தென்பட்டன. இதைக்கொண்டு ரூபாய் நாணயம் ஒருபுறச்சாய்வற்றது என ஊகிக்க முடியுமா என்பதைப் பரிசோதிக்க.

இங்கு $n = 1{,}000;\ p = \dfrac{1}{2},\ m = np = 1000 \times \dfrac{1}{2} = 500$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{250}$$

$$= 5\sqrt{10}$$

எனவே, $t = \dfrac{x_r - m}{\sqrt{npq}} = \dfrac{472 - 500}{5\sqrt{10}} = -\dfrac{28}{5\sqrt{10}} = -1{\cdot}736$

இங்கு $|t| = |-1{\cdot}736| = 1{\cdot}736 < 1{\cdot}96$ என்று வருகிறது.

ஆதலால், நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வற்றது எனக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி

1. ஒரு பகடையை 360 தடவைகள் உருட்டி, 3 அல்லது 4 என்று குறித்துள்ள பக்கங்கள் வரும் நிகழ்ச்சிகளை வெற்றி எனக் கொண்டு ஆராய்ந்ததில், 150 தடவைகள் வெற்றிகள் கிட்டின. வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை இயல்பாக வருவதற்கு ஒத்துள்ளதா எனப் பரிசோதிக்க.

[விடை: $|t| > 3$]

2. ஒரு பள்ளியிலுள்ள மாணவரின் எடை கூட்டுச் சராசரி 78 பவுண்டு, திட்ட விலக்கம் 5 பவுண்டு எனக் கணக்கிடப்பட்டன. தற்செயலாக ஒரு மாணவனின் எடையை அளவிட்டதில், 69 பவுண்டு என வந்தது. எடையில் வேற்றுமை வாய்ப்புக் காரணத்தால் ஏற்பட்டது எனக் கூறமுடியுமா ?

[விடை: $|t| = 1{\cdot}8$]

2. மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்

ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தை முறையே m, σ எனக் கொள்ளவும். 'ராண்டம்' மாதிரித் தேர்வின் அடிப்படையில் x-ன் n மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அவைகளை x_1, x_2,........x_n எனக் குறிப்பிடவும். இவைகளின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}$ எனக் கொள்ளவும்.

$\bar{x}$-க்கும், m-க்கும் உள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்க முற்படுகிறோம்.

n எண்ணிக்கைகள் கொண்ட மாதிரிகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்து ஆராயும்போது மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிப் பரவல் ($\bar{x}$-ன் பரவல்), 'm' ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலமைப்பை இறுதியில் பெறும் எனக் கணக்கியலில் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\text{எனவே, இங்கு } t = \frac{\bar{x} - m}{\bar{x}\text{-ன் திட்டப் பிழை}} = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

எப்போது $|t| \leqslant 1{\cdot}96$ என்று வருகிறதோ, அப்போது $\bar{x}$-க்கும் m-க்கும் உள்ள வேற்றுமையைக் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும், $|t| > 1{\cdot}96$ என்று வரும்போது, அவ் வேற்றுமையைக் குறிப்பிடத்தக்கது எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

[முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 'σ' தெரியாத சந்தர்ப்பத்தில், மாதிரிக் கூறின் திட்ட விலக்கம் 's' - ஐ அதன் மதிப்பீடாகக் கொண்டு பரிசோதனையை மேற்கொள்ளவும்.]

மாதிரிக் கணக்கு

(1) ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவை முறையே 7·5, 2·0 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. x-ன் 400 மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்து ஆராய்ந்ததில், மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரி 7·0 என வந்தது.

மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும், முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்கவும்.

இங்கு $m = 7{\cdot}5,\quad \sigma = 2{\cdot}0,\quad \bar{x} = 7{\cdot}0,\quad n = 400$

$$\text{எனவே, } t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{7{\cdot}0 - 7{\cdot}5}{\frac{2{\cdot}0}{\sqrt{400}}} = -\frac{{\cdot}5 \times 20}{2} = -5$$

இங்கு $|t| = |-5| = 5 > 1{\cdot}96$ என்று வருவதால், $\bar{x}$, m-க்கு முள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்க அளவிலுள்ளது எனக் கூறலாம்.

(2) ஒரு மாதிரிக் கூறில் 1,600 பேர்கள் உள்ளனர். அவர்களின் சராசரி உயரம் 68·5 அங்குலம் இக் கூற்றினை கூட்டுச் சராசரி 68 அங்குலம், திட்ட விலக்கம் 4 அங்குலம் உள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்கக் கூடும் என்பதைப் பரிசோதிக்கவும்.

இங்கு $n = 1{,}600,\ \bar{x} = 68{\cdot}5'',\ m = 68'',\ \sigma = 4$

$$\text{எனவே, } t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{68{\cdot}5 - 68{\cdot}0}{\frac{4}{\sqrt{1600}}} = \frac{{\cdot}5 \times 40}{4} = 5$$

இங்கு $|t| = 5 > 1{\cdot}96$ என்று வருவதால், எடுத்த மாதிரிக் கூறு, கொடுத்த முழுமைத் தொகுதியைச் சாராது எனக் கொள்கிறோம்.

பயிற்சி

நேபாள மலைச் சரிவில் வசிக்கும் மனிதர்களில் 100 பேர்களின் உயரங்களை அளவிட்டதில், அவர்களின் சராசரி உயரம் 5 அடி 6 அங்குலம் எனவும், திட்ட விலக்கம் 2 அங்குலம் என்றும் வந்தன. இவர்களை, சராசரி உயரம் 5 அடி 7 அங்குலம் உள்ள 'இந்திய ஆரிய' இனத்தைச் சார்ந்தவர்களெனக் கொள்ளமுடியுமா ?

[விடை $|t| > 2$, கொள்ளமுடியாது.]

(3) இரு மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிகளுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்

x மாறியின் n_1 மதிப்புகள் அடங்கிய ஒரு மாதிரிக் கூறையும், n_2 மதிப்புகள் அடங்கிய மற்றொரு தனித்த (independent) மாதிரிக் கூறையும் ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுப்பதாகக் கொள்வோம். முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளை m, σ எனக் கொள்வோம். $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்பன முறையே இரு மாதிரிக் கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் குறிக்கட்டும்.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ க்கும் உள்ள வேற்றுமையினைப் பரிசோதிக்க முற்படுகிறோம்.

n_1 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட மாதிரிகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்து ஆராயும்போது $\bar{x}_1$-ன் பரவல், m-ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$-ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலமைப்பினைப் பெற்றிருக்கும் எனவும், n_2 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட மாதிரிகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்து ஆராயும்போது, $\bar{x}_2$-ன் பரவலும் அதே 'm'-ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ ஐத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலமைப்பினைப் பெற்றிருக்கும் எனவும், கணக்கியலில் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்பன 'm'-ன் தனித்த மதிப்பீடாகக் கருதுவதால், $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-ன் திட்டப் பிழையை

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

எனக் கொள்ளவேண்டும்.

எனவே, $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை}} = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

எப்போது $|t| \leqslant 1{\cdot}96$ என்று வருகிறதோ, அப்போது $\bar{x}_1$-க்கும் $\bar{x}_2$-க்கும் உள்ள வேற்றுமையைப் புள்ளியியல் முறைப்படி குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும், $|t| > 1{\cdot}96$ என்று வரும்போது, அவ் வேற்றுமையைக் குறிப்பிடத்தக்கதெனவும் கொள்ளவேண்டும்.

3. (a) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் (σ) கொடுக்கப்படாவிட்டால், அதை மாதிரிக் கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களால் மதிப்பீடு செய்யவேண்டும். s_1, s_2 என்பன முறையே இரு மாதிரிக் கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்களைக் குறித்தால், $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ன் திட்டப் பிழை $\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}$ என்பதால் மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது.

எனவே, இங்கு $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}}$ என ஆகும்.

மற்றவை முன்போலவே.

(*b*) இரு மாதிரிக் கூறுகளும் வேறு வேறான இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து வந்திருக்கக்கூடும் என அறிவோமானால், $\bar{x}_1$-ன் திட்டப் பிழையை $\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}$, எனவும், $\bar{x}_2$-ன் திட்டப் பிழையை $\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}$ எனவும் கொண்டு ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)-ன் திட்டப் பிழையை $\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$ என்பதால் வரையறுக்க வேண்டும்.

$$\text{எனவே, இங்கு } t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \text{ என்றாகும்.}$$

$|t| \leqslant 1{\cdot}96$ என்று வருமானால் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$-க்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும்,

$|t| > 1{\cdot}96$ என்று வருமானால், வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்க அளவிலுள்ளது எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 1,000, 2,000 எண்ணிக்கைகள் உள்ள இரு விரிந்த ராண்டம் மாதிரிக் கூறுகளின் (two large random samples) கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 67·5 அங். 68·0 அங்., இவ்விரு மாதிரிகளும் திட்ட விலக்கம் 2·5 அங். உள்ள ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்கக் கூடுமா என்பதைப் பரிசோதிக்க.

இங்கு இரு மாதிரிக் கூறுகளும் திட்ட விலக்கம் 2·5 அங்., உள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளன என்ற ஓர் எடுகோளை அமைப்போம்.

எனவே, இங்கு $\bar{x}_1 = 67{\cdot}5$ அங். $\bar{x}_2 = 68{\cdot}0$ அங்.

$$n_1 = 1{,}000 \qquad n_2 = 2{,}000$$

$$\sigma = 2{\cdot}5 \text{ அங்.}$$

$$\therefore\ t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{67{\cdot}5 - 68{\cdot}0}{2{\cdot}5\sqrt{\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}}}$$

$$= -\frac{0{\cdot}5}{2{\cdot}5}\,\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{3}}$$

$$= -4\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore\ \left|\,t\,\right| = \left|\,-4\sqrt{\frac{5}{3}}\,\right| = 4\sqrt{\frac{5}{3}} > 4.$$

ஆதலால் எடுகோளை மறுக்கிறோம். அதாவது, இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியைச் சார்ந்தவையல்ல எனக் கொள்ளலாம்.

2. ஒரு தொகுதியிலுள்ள 1,000 உறுப்புகளை, 400, 600 எண்ணிக்கைகளுள்ள இரு பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஆராய்ந்ததில், அப்பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 110, 124 எனவும், திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 10, 16 எனவும் கணக்கிடப்பட்டன. இவ்விரு பிரிவுகளையும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சார்பிலா மாதிரிகளாகக் (independent samples) கொண்டு, சராசரிகளுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்க.

இங்கு நாம் இரு கூட்டுச் சராசரிகளுக்குமுள்ள வேற்றுமை வாய்ப்புக் காரணத்தால் ஏற்பட்டுள்ளன என்ற எடுகோளை அமைப்போம்.

$$\bar{x}_1 = 110 \qquad \bar{x}_2 = 124$$
$$n_1 = 400 \qquad n_2 = 600$$
$$s_1 = 10 \qquad s_2 = 16$$

இங்கு $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-ன் திட்டப் பிழை $= \sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}$

எனவே, $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}} = \dfrac{110 - 124}{\sqrt{\frac{100}{600} + \frac{256}{400}}} = -\dfrac{14}{\sqrt{\cdot 8066}}$

$$= -\frac{14}{\cdot 89}$$

$$\therefore \quad |t| = \left| -\frac{14}{\cdot 89} \right| = \frac{14}{\cdot 89} > 14.$$

ஆதலால், கூட்டுச் சராசரிகளுக்குள்ள வித்தியாசம் மிகக் குறிப்பிடத்தக்கதாகவுள்ளது. மேலும், இவ் வித்தியாசம் வாய்ப்பினால் ஏற்பட்டிருக்க முடியாது எனவும் கூறலாம்.

3. பின்வரும் பட்டியல் இரு மாவட்டத்தில் மாதிரிக் கூறெடுப்பின் வாயிலாகக் கணக்கிட்ட சராசரி நெல் விளைச்சலை அறிவிக்கிறது.

மாவட்டம்	மாதிரிகளி லடங்கிய எண்ணிக்கை	சராசரி விளைச்சல் ஓர் ஏக்கருக்கு (பவுண்டில்)	திட்ட விலக்கம் ஓர் ஏக்கருக்கு (பவுண்டில்)
A	225	1,400	400
B	200	1,150	375

இவ்விரு சராசரி விளைச்சல்களின் வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா என்பதனை ஆராய்க.

இங்கு $\bar{x}_1 = 1{,}400 \qquad \bar{x}_2 = 1{,}150$

$n_1 = 225 \qquad n_2 = 200$

$s_1 = 400 \qquad s_2 = 375$

இரு மாதிரிகளும் வெவ்வேறான முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம்.

$$\text{எனவே,} \quad t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{1400 - 1150}{\sqrt{\dfrac{415^2}{225} + \dfrac{375^2}{200}}} = 6{\cdot}5$$

எனவே, சராசரி விளைச்சல்களின் வேற்றுமை மிகக் குறிப்பிடத் தக்க அளவிலுள்ளதெனக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி

1. சிறுவர்களின் அறிவுக் கூர்மையை அளந்திடுவதற்காக ஆய்வுச் சோதனை நடத்தியதில், அறிவுக் குறியெண்களின் (intelligence quotients) திட்ட விலக்கம் 35 எனத் தெரிந்தது. 120 சிறுவர்களைப் பரிசோதித்ததில், அவர்களுக்குரிய அறிவுக் குறியெண் களின் சராசரி 125 எனவும், 100 சிறுமியர்களைப் பரிசோதித்ததில், சராசரி 130 எனவும் வந்தால், இச் சராசரிகளுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்க

[விடை $t = 1{\cdot}057$. வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல]

2. ஒரு தொகுதியிலுள்ள 2,500 மனிதர்களை, 1,000, 1,500 எண்ணிக்கைகளுள்ள இரு பிரிவுகளாகப் பிரித்து உயரங்களை அளவிட்டதில், கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 65 அங்., 66·5 அங். என்றும், திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 6 அங்., 7 அங்., என்றும்

தெரிந்தன. கூட்டுச் சராசரிகளுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத் தக்க அளவில் உள்ளதா என்பதைப் பரிசோதிக்க.

[விடை : $t = 5 \cdot 5$]

3. ஓர் ஊரில் இரு பிரிவுகளில் வசிப்போரின் குடிக்கூலிகளை ஆராய்ந்து கணக்கிட்டதில் பின்வரும் செய்திகள் கிடைத்தன:

		A - பிரிவு	B - பிரிவு
கூட்டுச் சராசரி	...	ரூ. 37·25	ரூ. 38·00
திட்ட விலக்கம்	...	ரூ. 6·00	ரூ. 6·50
எண்ணிக்கை	...	100	100

கூட்டுச் சராசரிகளின் வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்கவும்.

[விடை : $|t| = \cdot 849$ குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.]

4. திட்டப் பிழை என்றால் என்ன? விரிந்த மாதிரிக் கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய திட்டப் பிழை யாது? 65 பண்ணைகளில் விளைந்த நெல்லின் கூட்டுச் சராசரி (ஏக்கருக்கு) 12·7 மூட்டைகள் என்றும், திட்ட விலக்கம் 2·3 மூட்டைகள் என்றும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. 49 பண்ணைகள் அடங்கிய மற்றொரு மாதிரிக் கூறில் கூட்டுச் சராசரி நெல் விளைச்சல் ஏக்கருக்கு 11·6 மூட்டைகள் என்றும், திட்ட விலக்கம் 3·9 மூட்டைகள் என்றும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இருவிதப் பண்ணைகளில் விளைந்த நெல்லின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்க.

[விடை $|t| = 1 \cdot 75$]

நேரிடையாகக் கண்ட விகிதத்திற்கும், முழுமைத் தொகுதியில் வரும் விகிதத்திற்குமுள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்

ஒரு முயற்சியில், ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்குரிய ஊக அளவையை 'p' எனக் கொள்வோம். n முயற்சிகளில், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி 0, 1, 2, ...x,.........n - தடவைகள் ஏற்படுவதற்குரிய ஊக அளவைகளை முறையே $(q+p)^n$ என்ற பிரிவில் அடுத்தடுத்து வரும் கோவைகள் வரையறுக்கின்றன. எனவே, ஈருறுப்புப் பரவலமைப்பைக் கொண்டு, குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி இயல்பாக வருவதற்குரிய எண்ணிக்கையை 'np' எனவும், திட்ட விலக்கத்தை $\sqrt{npq}$ எனவும் அறியலாம். ஆதலால், குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி x தடவைகள் ஏற்பட்டால், அதற்குரிய விகிதம் $= \frac{x}{n}$ என்றாகும். குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி இயல்பாக வருவதற்குரிய விகிதம் $\frac{np}{n} = p$ என்றும், திட்ட விலக்கம் $= \frac{\sqrt{npq}}{n} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ என்றும் அறிய வேண்டும்.

எனவே, n முயற்சிகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி ஏற்படுவற்குரிய விகிதத்தை $p^1 \left(= \frac{x}{n}\right)$ எனக் கொண்டால், p^1, p இவைகளுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்க அளவில் உள்ளதா என்றுராய வேண்டி வருகிறது.

$$t = \frac{p - p^1}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டு

t-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடல் வேண்டும். எப்போது $|t| < 1{\cdot}96$ என்று வருகிறதோ அப்போது p, p^1 - களுக்குள் வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும், $|t| > 1{\cdot}96$ என்று வரும்போது, குறிப்பிடத்தக்கது எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு

1. மக்கள் கணக்கெடுப்பின் வாயிலாக ஒரு கிராமத்தில் 1,250 ஆண்களும், 1,300 பெண்களும் உள்ளனர் என்ற செய்தி கிடைத்துள்ளது. கிராமத்தில் ஆண், பெண் பாலாருக்குரிய விகிதம், இயல்பாக வருவதற்குரிய 1 : 1 என்ற விகிதத்திலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மாறுபட்டுள்ளதா என்பதை ஆராய்ந்திடுக.

$p =$ இயல்பாக ஆண்கள் வருவதற்குரிய விகிதம் $= \frac{1}{2}$

$p_1 =$ மாதிரியில் ஆண்கள் வந்ததற்குரிய விகிதம் $= \frac{1250}{2550}$

$$= \frac{25}{51}$$

$$n = 1250 + 1300 = 2550.$$

எனவே, இங்கு $$t = \frac{p - p_1}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{25}{51}}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2500}}}$$

$$= 25{\cdot}74 \quad (>1{\cdot}96)$$

ஆதலால் வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்க அளவில் வந்துள்ளது.

2. மருத்துவச் சாலைகளில் டைபாய்டு (Typhoid) காய்ச்சலில் ஓராண்டில் இறப்பவர்களின் வீதம் 18% எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு மருத்துவச் சாலையில் டைபாய்டு காய்ச்சலுள்ள 640 நோயாளி

களில் 63 பேர் இறந்தனர். இங்கு வரும் விகிதங்களுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்க.

$$\text{இங்கு} \quad p = \frac{18}{100} = \cdot 18, \; p_1 = \frac{63}{640} = \cdot 0984$$

$$p\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{\cdot 18 \times \cdot 82}{640}}$$

$$\text{எனவே,} \; t = \frac{p - p_1}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\cdot 18 - \cdot 0984}{\sqrt{\frac{\cdot 18 \times \cdot 82}{640}}}$$

$$= \frac{\cdot 0816 \sqrt{640}}{\sqrt{\cdot 18 \times \cdot 82}} = 5{\cdot}373. \; (> 1{\cdot}96)$$

ஆதலால் விகிதங்களுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதாகவுள்ளது.

பயிற்சி

1. ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் ஆண், பெண் பாலருக்குரிய விகிதம் 1 : 1 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஆய்வாளர் 100 நபர்களை மாதிரித் தேர்வின் அடிப்படையில் எடுத்துப் பார்த்ததில் 58 ஆண்களும், 42 பெண்களும் வந்தனர். ஆய்வாளரின்பேரில் சந்தேகம் கொள்வதற்கு இடமுள்ளதா?

[விடை : $t = 16$. சந்தேகிப்பதற்கு இடமுண்டு]

2. ஒரு கூடையில் 3,156 வெள்ளை முட்டைகளும், 1,200 மாநிறமுள்ள முட்டைகளும் உள்ளன. உயிர்நூலில் மாநிறமுள்ள முட்டைகளுக்குரிய வீதம் 25% எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளதாகக் கொண்டு, நேரிடையாகக் கண்டறிந்த செய்தி இயல்பாக வருவதற்கு முரண்பட்டதா என்பதை ஆராய்ந்திடுக.

[விடை : $t = 3{\cdot}97$. இயல்பாக வருவதற்கு முரண்பட்டது]

நேரிடையாகக் கண்ட இரு விகிதங்களில் ஏற்படும் வேற்றுமையைப் பரிசோதித்தல்

n_1, n_2 எண்ணிக்கைகளடங்கிய இரு ராண்டம் மாதிரிகள் ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்

வோம். மாதிரிகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பைப் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையை முறையே x_1, x_2 எனக் கொள்வோம். ஆதலால், முதல் மாதிரியில் குறிப்பிட்ட பண்பைப் பெற்றவர்களின் விகிதம்

$p_1 = \frac{x_1}{n_1}$. அதேபோல, இரண்டாவது மாதிரியில் குறிப்பிட்ட பண்பைப் பெற்றவர்களின் விகிதம் : $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$.

முழுமைத் தொகுதியில் இப் பண்பிற்குரிய விகிதத்தை 'p' எனக் கொள்வோம்.

எனவே, p_1, p_2-களுக்குள்ள வேற்றுமையைப் பரிசோதிக்க வேண்டியதாகிறது.

இவ்விரு மாதிரிகளும் தனித்த முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $(p_1 - p_2)$-ன் திட்டப் பிழை $\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}$ என்றாகும்.

$$t = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}$$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

t-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடவும். எப்போது $|t| \leqslant 1{\cdot}96$ என்று வருகிறதோ, அப்போது p_1, p_2 - களுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல எனவும், $|t| > 1{\cdot}96$ என்று வரும்போது, குறிப்பிடத்தக்கது எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

[முழுமைத் தொகுதியில் பண்பிற்குரிய விகிதம் கொடுக்கப்படாவிடில், அதனை $\frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ என்று வரையறுத்துக் கொள்ள வேண்டும்]

மாதிரிக் கணக்கு

(1) ஒரு நாட்டில் என்புருக்கி நோயால் பாதிக்கப்பட்டவரின் வீதம் 1% எனத் தெரிகிறது. 500, 1,000 மாணவர்களைக் கொண்ட இரு கல்லூரிகளில் முறையே 7, 8-பேர்கள் என்புருக்கி நோயால் பீடிக்கப்பட்டுள்ளனரென்றால், விகிதங்களுக்குள்ள வேற்றுமை வாய்ப்பிற்குரியதா என்று ஆராய்ந்திடுக.

$$\text{இங்கு } p_1 = \frac{7}{500} = \cdot 014\ ; \quad p_2 = \frac{8}{1000} = \cdot 008.$$

$$n_1 = 500\ ; \quad p = \cdot 01\ ; \quad n_2 = 1{,}000.$$

$$(p_1 - p_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\cdot 1 \times \cdot 99 \left(\frac{1}{500} + \frac{1}{1000}\right)}$$

$$= \cdot 0054.$$

$$\therefore\ t = \frac{p_1 - p_2}{(p_1 - p_2)\text{ ன் திட்டப் பிழை}} = \frac{\cdot 014 - \cdot 008}{\cdot 0054} = 1 \cdot 11$$

இங்கு $t = 1\cdot 11 < 1\cdot 96$. ஆதலால் வேற்றுமை வாய்ப்பினால் தான் ஏற்பட்டிருக்கக் கூடும் எனக் கூறலாம்.

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட மாதத்தில் ஓர் இயந்திரம் 900 பொருள்களை உற்பத்தி செய்ததில் 3·2% சேதாரப்பட்டுள்ளன. அதே மாதத்தில் மற்றொரு இயந்திரம் 1,000 பொருள்களை உற்பத்தி செய்ததில் சேதாரம் 2·8% எனச் செய்தி கிடைத்தது. சேதாரங்களுக்குரிய விகித வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதா என்றாராய்க.

$$\text{இங்கு } p_1 = \cdot 032 \qquad p_2 = \cdot 028$$

$$n_1 = 900 \qquad n_2 = 1{,}000$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \cdot 0299.$$

$$(p_1 - p_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= \sqrt{\cdot 0299 \times \cdot 9701 \left(\frac{1}{900} + \frac{1}{1000}\right)}$$

$$= \frac{\cdot 233}{30}$$

$$\text{எனவே, } t = \frac{p_1 - p_2}{(p_1 - p_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை}} = \frac{(\cdot 032 - \cdot 028)}{\cdot 233} \times 30$$

$$= \frac{\cdot 004 \times 30}{\cdot 233} = \frac{\cdot 12}{\cdot 233} < 1\cdot 96$$

ஆதலால், விகிதங்களுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்கதல்ல.

பயிற்சி

(1) $n_1 = 175,\ x_1 = 104;\ n_2 = 131;\ x_2 = 59.$

p_1, p_2 மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளில் ஏற்படும் வேற்றுமையைப் பரிசோதித்திடுக.

[விடை $t = 2{\cdot}4$]

(2) இரு நகரங்களில் முறையே 600, 900 நபர்களைப் பேட்டி கண்டதில் 400, 450-பேர்கள் சிகெரெட் குடிப்பதாகத் தெரிய வந்தது. சிகெரெட் குடிப்பதின் விகிதங்கள் குறிப்பிடத்தக்க வேற்றுமையைப் பெற்றுள்ளனவா என்று கண்டிடுக.

[விடை: $t = 3{\cdot}15$ குறிப்பிடத்தக்கது].

15. அளவுக் குறியீட்டெண்கள்
(Index Numbers)

தொடர்புடைய மாறிகளின் தொகுதிகளுக்குள்ள வேறுபாடுகளை அளவிட்டுக் கூறுவதன்பொருட்டு அமைக்கப்படும் முறைகளே குறியீட்டெண்களாகும். ஆண்டுதோறும் உற்பத்தியாகும் பொருள்களிலும், விற்பனைக்கு வரும் பொருள்களிலும், அவைகளின் விலைவாசிகளிலும் மாறுபாடுகள் உள்ளதை யாவரும் அறிவோம். பள்ளி மாணவர்களின் அறிவுத்திறன், தொழிலாளர்களின் வேலை நுட்பத் திறன் ஆகியவைகளும் மாறுபடக்கூடியவைகளே. எனவே, மாறுபாடுகள் கால, இட அமைப்புகளின் போக்கை அனுசரித்து ஏற்படுகின்றன.

ஒரு பொருளின் விலையில் ஒரே ஆண்டிற்குள் ஏற்றத் தாழ்வுகள் ஏற்படுகின்றன. அதே பொருளின் விலை இடத்திற்கிடம் மாறுபடுகிறது. மேலும், அப் பொருளின் விலை அதன் உற்பத்தி, தேவை, மக்களிடமுள்ள பணவசதி ஆகியவற்றைப் பொறுத்தும் மாறுமியல்புடையது. ஆகவே இடம், காலம், பொருளாதார அமைப்புகளால் பாதிக்கப்பட்டு ஏற்படக்கூடிய மாறுபாடுகளைப் பொதுவாக எவ்விதம் அறிவது? அவ்வப்போது எங்ஙனம் ஒத்திட்டுப் பார்ப்பது? இவ் ஐயப்பாட்டினை ஓரளவுக்கு ஈடு செய்வதில் குறியீட்டெண்கள் பெரிதும் உதவி புரிகின்றன.

நடைமுறையில் பலவகையான குறியீட்டெண்கள் தொகுக்கப்படுகின்றன. விலைவாசிகளின் போக்கை அளவிட்டுக் கூற விலைக் குறியீட்டெண்களை (Index Numbers of Prices) அமைக்கிறோம். ஒரு சில முக்கிய நகரங்களில் வசிக்கும் மக்களின் வாழ்க்கை நிலவரத்தை அறிந்து ஒத்திட்டுப் பார்க்க வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைத் தொகுக்கிறோம்.

குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்

1. பருவகாலங்களில் விலைவாசிகளில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளை அறிவிக்க உதவுகின்றன.

2. விலைவாசிகளின் போக்கை ஆராயும்போது, அவைகளின் மாற்றங்களுக்குரிய காரணங்களை வெளிப்படுத்தவும், இதன் விளைவாக, பொருளாதாரத் துறைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களால் சமூகம் எவ்வாறு பாதிக்கப்படுகிறதென்பதை எடுத்துக் காட்டவும் பயன்படுகின்றன.

3. பொருள்களின் விலைகளுக்கும், தங்கம், பாங்கு சேமிப்புகள், பாங்கு மூலதனங்கள், பாங்கு கடன்கள், பொருள்களின் மொத்த உற்பத்தி அளவுகள் ஆகியவைகளுக்கும் தொடர்புள்ளன. இத் தொடர்பாராய்ச்சியில், விலை விகிதங்களின் பொதுப்படையான மாறுதல்களை அளவிட்டுக் கூறுவதில் குறியீட்டெண்களைப் பயன் படுத்துதல் வழக்கம். விலை விகிதங்களுக்குள்ள ஏற்றத்தாழ்வுகளை அளவிட்டும், விலை விகிதங்களின் அலைவெண் பரவலை அமைத்தும், விலை மாற்றங்களின் மொத்த மதிப்பளவுகளை, விற்பனைக்கு வரும் பொருள்களின் மொத்த அளவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தும், சரக்குகளைத் தருவித்தலின் நெகிழ்ச்சியை (Elasticity of Supply), தேவையின் நெகிழ்ச்சியுடன் (Elasticity of Demand) ஒப்பிட்டுப் பார்த்தும், விலைவிகிதங்களின் மாறுபாடுகளை குறியீட்டெண்கள் வாயிலாக அளவிட்டுக்கூற முடியும்.

4. குறியீட்டெண்களைக் கொண்டு, விலைவாசிகளைக் கட்டுப்படுத்தி, அவைகளிலுள்ள மாற்றங்களைக் குறைக்க முடியும். தங்கத்தின் விலை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, சரக்குகளின் விலைகளும் ஏறுமென்பதைக் குறியீட்டெண்கள்மூலம் அளவிட்டுக் கூறலாம்.

5. வாழ்க்கைத் தரம் (standard of living) சரிநிலையிலிருக்க, விலைவாசிகளில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளுக்குகேற்ப, பஞ்சப் படியை (dearness allowance) நிர்ணயிப்பதில் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் பயன்பட்டு வருகிறது. வாழ்க்கைச் செலவினங்களை ஆராய்ந்து, ஒரு சில குறிப்பிட்ட நகரங்களின் வாழ்க்கைத் தரத்தை அறிய, வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள் கணிக்கப்படுகின்றன. ஓர் இடத்திற்கும் மற்றோர் இடத்திற்குமுள்ள வாழ்க்கைநிலை மாறுபடுவதை ஒருவாறு சமநிலைப்படுத்துவதிலும் இவைகள் பெரிதும் உதவி புரிகின்றன.

6. காலப்போக்கில் சொத்துகள் பழுதடையக் கூடியதால், அவ்வப்போது சொத்து மதிப்புகளைக் குறைவுபடுத்துவதில் குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்துவது வழக்கம்.

7. அநேக அலுவலகங்கள் குறியீட்டெண்களைத் தொகுப்பதில் ஈடுபடுகின்றன. வணிகத் தொழில் அபிவிருத்தி, கைத்தொழில் இயந்திரத் தொழில் உற்பத்திப் பொருள்களின் அபிவிருத்தி,

விற்பனை, அரசாங்கப் பத்திரங்கள், பங்குகள் ஆகியவற்றின் அபி விருத்தியை அளவிட்டுக் கூறுவதற்கும் குறியீட்டெண்கள் தொகுக் கப்படுகின்றன. காலவரிசைத் தொடரின் போக்கை, பொது இயல் பைச் சார்ந்த, பருவநிலைக்குரிய, வணிகத் துறைகளிலுள்ள சுழற்சி களுக்குரிய அல்லது ஒழுங்கற்றதற்குரிய போக்குகளாகப் பிரித்து ஆராய்வதில் குறியீட்டெண்கள் தனிச் சிறப்பைப் பெறுகின்றன.

8. ஒரு நாட்டின் மொத்த வருமானத்தின் மேல் நோக்கிய போக்கை (upward trend in national income) கூடுமான வரையில் குறியீட்டெண்களின் வாயிலாகத்தான் அறிய முடியும்.

9. சமூக, பொருளியலைச் சார்ந்த துறைகளில் ஏற்படும் நிகழ்ச் சிகளின் போக்கை அளவிட்டுக் கூறுவதில் குறியீட்டெண்கள் உதவி புரிகின்றன. கப்பலோட்டிக்குத் திசையறியும் கருவி எவ் விதம் பயன்படுகிறதோ, அவ்விதமே, பொருளாதார ஆராய்ச்சி யாளருக்குப் பொருளாதாரத்தில் அவ்வப்போது உள்ள நிலையை உடனடியாகத் தீர்மானிப்பதில் குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன.

சார்பிகளும், விலைச் சார்பிகளும்
(Relatives and Price Relatives)

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒரு மாறி ஏற்கும் மதிப்பினை அடிப் படையாகக் கொண்டு, மற்றக் காலங்களில் மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை விகிதங்களாக மாற்றி வரும் எண்களே சார்பிகளாகும் (Relatives). சார்பிகள் பெரும்பாலும் சதவீதத்தில் குறிக்கப்படும். சார்பிகள் வெறும் விகிதங்களானதால், மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் அளவிட்ட அலகுகோலால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. எனவே, சார்பிகளை ஒத்திட முடியும். மாறியானது, ஒரு பொருளின் விலையைக் குறிக்குமானால், சார்பிகளை விலைச் சார்பிகள் (Price Relatives) எனக் கூறுவது வழக்கம்.

குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவதில் காலப்பகுதியைப் பெரும் பாலும் ஓராண்டாகக் கருதுகிறோம். ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக் (base year) கருதலாம். அடிப்படை ஆண்டு என்பதைக் குறிக்க 0 - என்ற சின்னத்தையும், அடுத் தடுத்து முன்போ, அல்லது பின்போ வரும் ஆண்டுகளைக் குறிக்க 1, 2, 3, ...என்ற இலக்கங்களையும், மாறியைக் குறிக்கும் எழுத் துடன் பிணைப்பது வழக்கம். எனவே 'p' என்பது ஒரு பொருளின்

விலையைக் குறித்தால், p_0 என்பது அடிப்படை ஆண்டில் அதன் விலையைக் குறிக்கும்; p_1 என்பது அடுத்துவரும் ஆண்டில் [அல்லது தற்போதைய ஆண்டில் (current year)] அதன் விலையைக் குறிக்கும். பல பொருள்களை ஆராயும்போது, k-வது பொருளின் விலையை அடிப்படை ஆண்டில் p_{0k} எனவும், அடுத்த ஆண்டில் (அல்லது தற்போதைய ஆண்டில்) p_{1k} எனவும் குறிப்பது வழக்கம்.

எனவே $\frac{p_{11}}{p_{01}}$, $\frac{p_{12}}{p_{02}}$, ... $\frac{p_{1k}}{p_{0k}}$ என்பன முறையே k பொருள்களின் முதலாண்டிற்குரிய விலைச் சார்பிகளாகும்.

அதேபோல் $\frac{p_{21}}{p_{01}}$, $\frac{p_{22}}{p_{02}}$, ... $\frac{p_{2k}}{p_{0k}}$ என்பன முறையே k பொருள்களின் இரண்டாவதாண்டிற்குரிய விலைச் சார்பிகளாகும். (இவைகளை சதவீதத்திலும் தெரிவிக்கலாம்). இங்கு அடிப்படை ஆண்டை மாற்றாமல், நிலையாகக் கொண்டு, மற்ற அடுத்தடுத்து வரும் ஆண்டுகளுக்கேற்ற விலைச் சார்பிகள் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, இவைகள் உறுதி நிலைச் சார்பிகளெனப்படும் (fixed base relatives).

இதற்கு மாறாக, ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் வரும் விலை மதிப்பினை, அதற்கு முன்புள்ள ஆண்டில் வரும் விலை மதிப்பின் விகிதமாக எடுத்து வரும் சார்பிகளைச் 'சங்கிலிச் சார்பிகள்' (link relatives) எனக் கொள்ளப்படும். எனவே $\frac{p_{1k}}{p_{0k}}$, $\frac{p_{2k}}{p_{1k}}$, $\frac{p_{3k}}{p_{2k}}$, ... $\frac{p_{nk}}{p_{n-1k}}$ ... என்பன k-வது பொருளின் சங்கிலி (விலை)ச் சார்பிகளாகும்.

$$\frac{p_{nk}}{p_{0k}} = \left(\frac{p_{1k}}{p_{0k}}\right) \times \left(\frac{p_{2k}}{p_{1k}}\right) \times \left(\frac{p_{3k}}{p_{2k}}\right) \times \cdots \times \left(\frac{p_{n-1k}}{p_{n-2k}}\right) \times \left(\frac{p_{nk}}{p_{n-1k}}\right).$$

ஆக, k-வது பொருளின் ஏதாவதொரு ஆண்டிற்குரிய சார்பி, அவ்வாண்டிற்கு முன்பாக வரும் ஆண்டுகளுக்குரிய சார்பிகளின் பெருக்குத் தொகையாகும். இங்கு சார்பிகள் சங்கிலி கோத்ததைப் போல் வருவதால், 'சங்கிலிச் சார்பிகள்' என வழங்கப்படுகின்றன.

சார்பிகளை வரைபடத்தில் புள்ளிகளாக மாற்றி அமைத்து இரு மாறிகளின் போக்கை ஒத்திடுவோம்.

(1947—1956) ஆம் ஆண்டுகளில் 1,000 செங்கற்களின் விலைகளும், செலவிடப்பட்ட மொத்த செங்கற்களின் எண்ணிக்கைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	1,000 செங்கற்களின் விலை (ரூபாயில்)	செலவழிந்த செங்கற்களின் எண்ணிக்கை (இலட்சத்தில்)
1947	24·00	25
1948	26·40	26
1949	27·60	30
1950	28·52	36
1951	30·00	38
1952	28·80	34
1953	32·88	32
1954	35·04	40
1955	35·28	46
1956	35·52	43

1947ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக் (base year) கொண்டு, மற்ற ஆண்டுகளின் விலை, செலவழிந்த செங்கற்கள் ஆகியவற்றின் சார்பிகளைக் கணக்கிட்டு, கீழ்வருமாறு பட்டியலில் அமைக்கவும்.

ஆண்டு	சார்பிகள் விலை	செலவழிந்த கற்கள்
1947	100	100
1948	110	104
1949	115	120
1950	118	144
1951	125	152
1952	120	136
1953	137	128
1954	146	160
1955	147	184
1956	148	172

சார்பிகளைக் கணக்கிடும் முறை –

1947 - ல் 1000 செங்கற்களின் விலை = 24·00

1948 - ல் ,, ,, = 26·40

எனவே 1948ஆம் ஆண்டிற்குரிய விலைச் சார்பி $= \frac{26 \cdot 40}{24 \cdot 00} \times 100.$

$= 110.$

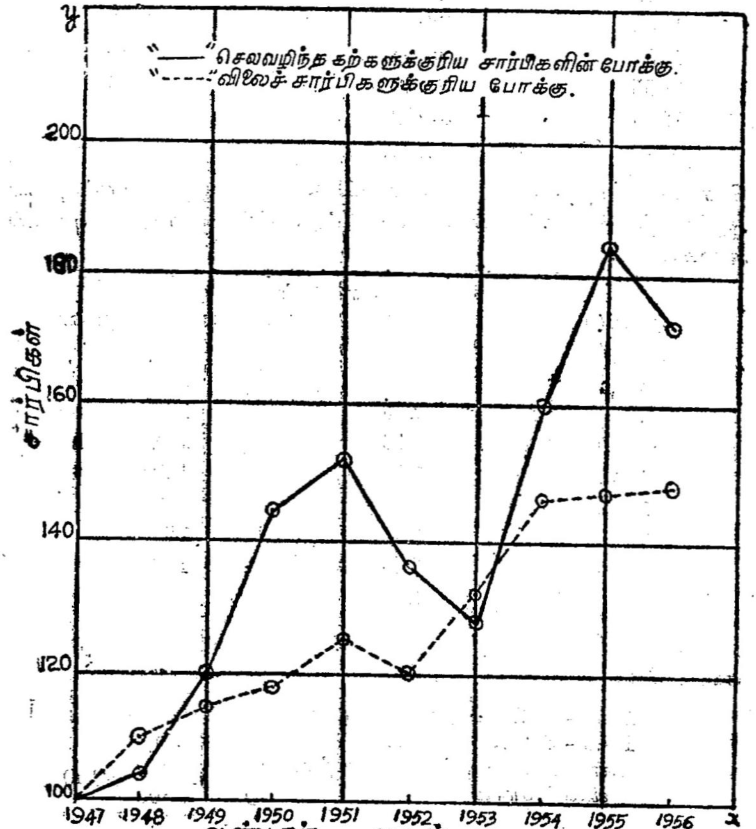
அவ்விதமே 1948ஆம் ஆண்டிற்குரிய செவழிந்த செங்கற்களின் சார்பி $= \frac{26}{25} + 100.$

$= 104.$

இதேபோல் மற்றவைகளையும் கணக்கிடல் வேண்டும்.

வரைபட விளக்கம்

இச் சார்பிகளை வரைபடமூலம் விளக்கிடுவோம். கிடை அச்சில் (x - axis) ஆண்டினையும், நிலை அச்சில் (y - axis) சார்பிகளையும் கொண்டு தகுந்த அலகுகோலைப் பயன்படுத்தி, சார்பிகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை அமைத்திடவும். பிறகு அவைகளில் அடுத்தடுத்து வரும் புள்ளிகளை நேர்க்கோடுகளால் சேர்த்து இரு வரைபடங்களை முறையே விலைச் சார்பிகளைக் குறிக்கவும், செலவழிந்த செங்கற்களின் சார்பிகளைக் குறிக்கவும் வரைதல் வேண்டும்.



படம்-45

இங்கு செங்கற்களின் தேவை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, அதன் விலையும் அதிகரித்துச் சென்றிருப்பதையும், செங்கற்கள் தேவை 1952-ல் குறைந்தபோது, விலையும் குறைந்துவிட்டதையும் அறிய

லாம். பிறகு தேவை அதிகரிக்கவே, விலையும் ஏறிச் சென்றுள்ளதையும் அறியலாம்.

குறியீட்டெண் (Index Number)

ஒரு சில காலங்களில் சில பொருள்களின் விலைகள் அதிகரித்தும், மற்றும் சிலவற்றின் விலைகள் குறைந்தும் வரக்கூடுமாதலால், பொதுவாக விலைவாசிகளின் ஏற்றத் தாழ்வுகளைச் சுருக்கமாகத் தெரிவிக்கும் எண் மதிப்பே குறியீட்டெண்ணாகும். குறியீட்டெண்ணும் ஒருவகைச் சராசரி அளவாகவும் கருதலாம்.

குறியீட்டெண்களை எளிய குறியீட்டெண்கள், எடையிட்டக் குறியீட்டெண்கள் என இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

எளிய முறைப்படித் தொகுத்த விலைச் சார்பிக் குறியீட்டெண்கள் (Simple Index Numbers of Price Relatives)

இங்கு விலைச் சார்பிகளின் சராசரி மதிப்பளவைக் குறியீட்டெண்ணாகக் கருதுகிறோம். பயன்படுத்தும் சராசரி அளவுகோலுக்கு ஏற்ப, கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் (Harmonic) சராசரி என்ற குறியீட்டெண்களை அமைத்திடலாம். இவைகள் ஒவ்வொன்றையும் வரையறுப்போம்.

$p_{01}, p_{02}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p_{0k}, \ldots\ldots\ldots\ldots \; p_{0n}$;

$p_{11}, p_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; p_{1k}, \ldots\ldots\ldots\ldots \; p_{1n}$ என்பன முறையே அடிப்படை ஆண்டு (base year), அதற்கடுத்து வரும் (அல்லது தற்போதைய) (Current year) ஆண்டு ஆகியவற்றில் நிகழும் n பொருள்களின் விலைகளைக் குறிக்கின்றன.

$$\frac{p_{11}}{p_{01}}, \quad \frac{p_{12}}{p_{02}}, \ldots\ldots\ldots \frac{p_{1k}}{p_{0k}}, \ldots\ldots\ldots \frac{p_{1n}}{p_{0n}}$$ என்பன

முறையே n பொருள்களின் விலைச் சார்பிகளாகும்.

விலைச் சார்பிகளின் கூட்டுத் தொகையை, மொத்த பொருள்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து வரும் மதிப்பளவே 'எளிய கூட்டுச் சராசரி குறியீட்டெண்' ஆகும். பெரும்பாலும் இதைச் சதவீதத்தில் தெரிவிப்பது வழக்கம். எனவே,

(1) எளிய கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\frac{p_{11}}{p_{01}} + \frac{p_{12}}{p_{02}} + \dots + \frac{p_{1k}}{p_{0k}} + \dots + \frac{p_{1n}}{p_{0n}}}{n} \times 100$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{p_{1k}}{p_{0k}}\right\} \times 100$$

n விலைச் சார்பிகளின் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட்டு, அதன் nஆவது வர்க்க மூலத்தை எடுத்து, பிறகு அதை சதவீதத்தில் தெரிவித்தால், 'பெருக்குச்சராசரி குறியீட்டெண்' கிடைக்கும். எனவே

(2) எளிய பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்

$$= \sqrt[n]{\frac{p_{11}}{p_{01}} \times \frac{p_{12}}{p_{02}} \times \dots \frac{p_{1k}}{p_{0k}} \times \dots \frac{p_{1n}}{p_{0n}}} \times 100$$

$$= \left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{p_{1k}}{p_{0k}}\right\}^{\frac{1}{n}} \times 100$$

n விலைச் சார்பிகளது தலைகீழ் பின்னங்களை (reciprocals) எடுத்து, அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழ் எண்ணைக் கணக்கிட்டு வரும் மதிப்பளவே 'ஹார்மானிக்' சராசரிக் குறியீட்டெண்' ஆகும். எனவே,

(3) ஹார்மானிக் சராசரிக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\left\{\frac{p_{01}}{p_{11}} + \frac{p_{02}}{p_{12}} + \dots + \frac{p_{0k}}{p_{1k}} + \dots + \frac{p_{0n}}{p_{1n}}\right\}} \times 100$$

$$= \frac{n \times 100}{\sum_{k=1}^{n} \frac{p_{0k}}{p_{1k}}}$$

n பொருள்களின் தற்போதைய விலை மதிப்புகளைக் கூட்டி, அடிப்படை ஆண்டில் வந்த விலை மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையால் வகுத்து வரும் மதிப்பினையும் ஒருவகைக் குறியீட்டெண்ணைக் கருதலாம். இதை 'மொத்தக் குறியீட்டெண்' (Aggregate Index Number) எனக் கூறுகிறோம். எனவே,

(4) மொத்தக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{p_{11} + p_{12} + \dots\dots\dots + p_{1k} + \dots\dots + p_{1n}}{p_{01} + p_{02} + \dots\dots\dots + p_{0k} + \dots\dots + p_{0n}} \times 100$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{1k}}{\sum_{k=1}^{n} p_{0k}} \times 100.$$

மாதிரிக் கணக்கு

1950, 1960 ஆண்டுகளில் 4 பொருள்களின் விலைப்பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

பொருள்	அலகு	விலை ரூபாயில்	
		1950	1960
அரிசி	மூட்டை	48	72
பருப்பு	மூட்டை	40	64
நெய்	டின்	60	80
பால்	10 படி	10	15

1950ஆம் ஆண்டின் விலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, 1960ஆம் ஆண்டிற்குரிய (a) கூட்டுச் சராசரி, (b) பெருக்குச் சராசரி, (c) ஹார்மானிக் சராசரி, (d) மொத்தக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவோம்.

(a) கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\frac{72}{48} + \frac{64}{40} + \frac{80}{60} + \frac{15}{10}}{4} \times 100$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{8}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2}}{4} \times 100$$

$$= \frac{45 + 48 + 40 + 45}{4 \times 30} \times 100$$

$$= \frac{178}{4 \times 30} \times 100$$

$$= 148{\cdot}33.$$

(b) பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண் $= \left[\frac{72}{48} \times \frac{64}{10} \times \frac{80}{60} \times \frac{15}{10}\right]^{\frac{1}{4}} \times 100$

$$= \left[\frac{24}{5}\right]^{\frac{1}{4}} \times 100$$

$$= (4 \cdot 8)^{\frac{1}{4}} \times 100$$
$$= 148 \cdot 00$$

(c) ஹார்மானிக் சராசரிக் குறியீட்டெண் $= \frac{4}{\left[\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right]} \times 100$

$$= \frac{4 \times 24}{65} \times 100$$
$$= 147 \cdot 69.$$

(d) மொத்தக் குறியீட்டெண் $= \left\{\frac{72 + 64 + 80 + 15}{48 + 10 + 60 + 10}\right\} \times 100$

$$= \frac{23100}{128}$$

$$= 180 \cdot 5$$

எடையிட்ட குறியீட்டெண்கள் (Weighted Index Numbers)

எளிய முறைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்போது, ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் ஒரே அளவில் முக்கியத்துவம் தரப்பட்டுள்ளது. ஆனால், பொருள்களெல்லாம் ஒரே மாதிரியான முக்கியத்துவம் பெற்றவையல்ல. அவ்வப்போது கால வேறுபாட்டாலும், புதுக் கண்டு பிடிப்பாலும், பயன்படுத்துவோரின் படித்தரத்தாலும் (status) பொருள்களின் முக்கியத்துவம் மாறக்கூடியதே. ஆதலால், ஒவ்வொரு பொருளும் எந்த அளவு வலியுறுத்தப்படவேண்டு மென்பதை ஒவ்வொரு பொருளும் எத்தனை தடவைகள் மீண்டும் மீண்டும் வாங்கப்பட்டன என்ற எண்ணிக்கையின் வாயிலாகக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இந்த எண்ணிக்கைகளைத்தான் 'எடைகள்' (weights) எனக் கொள்கிறோம். எனவே, குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும் போது எடையிடும் முறை சிறப்பிடம் பெறுகிறது. இவ்வாறு ஒவ்வொரு பொருளும் எத்தனை தடவை வந்துள்ளது எனக் கண்டு அவைகளை எடைகளாகப் பயன்படுத்திக் காணும் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணை 'எடையிட்ட குறியீட்டெண்' (Weighted Index Number) எனக் கூறுகிறோம்.

ஒவ்வொரு பொருளின் விலையை, அது எத்தனை முறை வாங்கப் பட்டது என்ற எண்ணிக்கையால் பெருக்கி, அவைகளைக் கூட்டி வரும் தொகையால் தற்போதைய ஆண்டிலும் (current year), அடிப் படை ஆண்டிலும் (base year) தனித்தனியே மொத்தமாகச் செல விட்ட பணத்தொகையைக் கணக்கிட முடியும். தற்போதைய ஆண்டில் செலவிட்ட பணத்தொகையை, அடிப்படை ஆண்டில் செலவிட்ட தொகையின் விகிதமாக அமைத்து ஏற்படும் குறியீட் டெண் இவ்விரு ஆண்டு விலைவாசிகளுக்குள்ள ஏற்றத் தாழ்வுகளை அளந்திட முற்படுகிறது.

p_{ok}, p_{1k} என்பன முறையே அடிப்படை, தற்போதைய ஆண்டுகளில், k வது பொருளின் விலைகளையும், q_{ok}, q_{1k} என்பன முறையே k வது பொருள் எவ்வளவு அளவு (quantity) அடிப்படை தற்போதைய ஆண்டுகளில் வாங்கப்பட்டுள்ளன என்பதையும் குறிக் கட்டும். எனவே, அடிப்படை ஆண்டில் செலவிட்ட தொகை

$$= \sum_{k=1}^{n} p_{ok}\, q_{ok}$$

தற்போதைய ஆண்டில் செலவிட்ட தொகை $= \sum_{k=1}^{n} p_{1k}\, q_{1k}$

ஆதலால், தற்போதைய ஆண்டில் செலவிட்ட தொகையை, அடிப் படை ஆண்டில் செலவிட்ட தொகையின் விகிதமாக அமைக்கும் போது, நமக்கு $\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{ok}\, q_{ok}}$ என்ற மதிப்பு கிட்டுகிறது. இதையே நாம் ‘உண்மை மதிப்பு விகிதம்’ (True Value Ratio) எனக் கூறுகிறோம்.

அடிப்படை ஆண்டில் வாங்கியுள்ள அளவுகளை எடைகளாகக் கொண்டு, தற்போதைய ஆண்டில் செலவிடத்தக்க தொகையை, அடிப்படை ஆண்டில் செலவிட்ட தொகையின் விகிதமாகக் கணக் கிட்டு வரும் குறியீட்டெண்ணுக்கு ‘லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண்’ (Laspeyers' Index Number) என்று பெயர்.

$$\text{(5) லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண்} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{1k}\, q_{ok}}{\sum_{k=1}^{n} p_{ok}\, q_{ok}} \times 100.$$

ஒரு பொருளின் விலை ஏறும்போது அதை வாங்கும் அளவு குறையுமென்றும், விலை குறையும் போது, வாங்கும் அளவு அதிகரிக்குமென்றும் அனுபவத்தால் அறியக் கூடிய உண்மை. எனவே, இங்கு அடிப்படை ஆண்டில் வாங்கின பொருள்களின் அளவை (q_{ok}) - ஐ எடையாகக் கொள்வதால், லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண், மேல் நோக்கிய ஒரு புறச் சாய்வைப் (upward bias) பெற்றுள்ளது எனக் கூறலாம். ஏனெனில், தற்போதைய ஆண்டில் விலை அதிகரித்துள்ள பொருள்களை அடிப்படை ஆண்டில் வாங்கின அளவுகளைவிட சற்றுக் குறைவாகத்தான் வாங்கியிருக்கக்கூடும். ஆனால், இங்கு தற்போதைய விலைகளை q_{ok}-ஆல் பெருக்கியிருப்பதால், இக் குறியீட்டெண் விலைவாசிகளின் நிலவரத்தைச் சற்று அதிகமாக உயர்த்தியுள்ளதெனலாம். மேலும், தற்போதைய ஆண்டில் விலை குறைந்துள்ள பொருள்களைச் சற்று அதிகமாகவே வாங்கியும், மொத்தத்தில் செலவைச் சற்றுக் குறைத்தும், அடிப்படை ஆண்டில் அவா நிறைவேறின அளவுக்கு, தற்போதைய ஆண்டிலும் பெற்றிருக்க முடியும். எனவே, இக் குறியீட்டெண் விலை மாற்றத்தின் மேல் எல்லையைக் (upper limit in price changes) குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

தற்போதைய ஆண்டு நிலவரத்திற்கேற்ப, பொருள்களை வாங்குவதன் அளவுகளை (q_{1k}) எடைகளாகக் கொண்டு, தற்போதைய ஆண்டில் செலவிட்ட தொகையை, அடிப்படை ஆண்டில் செலவிடக் கூடிய தொகையின் விகிதமாகக் கணக்கிட்டு வரும் குறியீட்டெண்ணுக்கு பாஷேயின் குறியீட்டெண் (Paache's Index Number) என்று பெயர்.

(6) பாஷேயின் குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{ok}\, q_{1k}} \times 100.$

இம் முறையில் புதிய எடைகளை ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் எடுக்க வேண்டி வருகிறது. இவ்வாறு எடைகளை எடுப்பது நடைமுறையில் எளிதல்ல. மேலும், ஒவ்வோர் ஆண்டில் ஏற்படும் விலைவாசி நிலைமையை அடிப்படை ஆண்டு நிலைமையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியுமேயன்றி, இடையில் வரும் ஆண்டுகளுக்குள் மாற்ற நிலைமையை ஒத்திட முடியாது. ஏனெனில், அந்தந்த ஆண்டில் பொருள்கள் வாங்குவதன் அளவுகள் மாறுபடுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக, 1959ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு, அவ்வாண்டில் வாங்கின பொருள்களின் அளவுகளை எடைகளாகக் கொண்ட முறையில், 'ஒரு குடும்பத்துக்கு 1959-ல் சராசரியாக ஒரு மாத வாழ்க்கைக்கு ரூ. 100 ஆகுமென்றால், தற்போதைய 1960ஆம் ஆண்டில், 1959-ல் கிட்டிய அதே அளவு

அவா (வாழ்க்கை நடத்துவதில்) நிறைவேற வேண்டுமானல், ஒரு மாதத்திற்கு ஆகும் செலவு எவ்வளவு' என்ற வினவிற்கும் பதிலளிக்கிறது. ஆனல் தற்போதைய ஆண்டில் (1960-ல்) பொருள்கள் வாங்குவதன் அளவுகளை எடைகளாக எடுக்கும்போது, 'தற்போதைய நிலைப்படி, 1959ஆம் ஆண்டில் ஒரு குடும்ப வாழ்க்கைக்கு ரூ. 100 தேவைப்படுமானல், இப்போது (1960ஆம் ஆண்டில்) எவ்வளவு ஒரு குடும்பம் செலவிட நேரிடும்', என்ற வினவிற்குப் பதிலளிக்கிறது. இவ் வினவைக் கேட்பதில், விலைகள் சற்றுக் குறைந்துள்ள பொருள்களுக்கு அளவுக்கு மீறின எடைகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதை வெளிப்படையாகத் தெரிவிக்கிறது. அதாவது, விலை குறைந்துள்ள பொருள்களைத் தற்போதைய ஆண்டில் சற்று அதிகமாகவே வாங்கப்படுமானதால், அவைகளை 1959ஆம் ஆண்டு விலை நிலவரத்துக்கு எடைகளாக மேற்கொள்ளும் போது, இக் குறியீட்டெண் அமைப்பு முறையில், தற்போதைய விலைவாசியின் நிலவரத்தைச் சற்றுக் குறைக்கிறது. எனவே பாஷேயின் குறியீட்டெண் (Paache's Index Number) அமைப்பு முறை, விலை மாற்றத்தின் கீழ் எல்லையைக் (lower limit of price changes) குறிப்பிடுகிறது எனலாம்.

அடிப்படை ஆண்டில் வாங்கின பொருள்களின் அளவு, தற்போதைய ஆண்டில் வாங்கின பொருள்களின் அளவு ஆகியவைகளின் சராசரியை (அல்லது மொத்தம்) எடையாகக் கொண்டு வரையறுக்கப்படும் குறியீட்டெண்ணுக்கு, மார்ஷல்-எட்ஜ்வொர்த்-ஆகியோரின் குறியீட்டெண் (Marshall-Edgeworth Formula) என்று பெயர்.

(7) மார்ஷல்-எட்ஜ்வொர்த் ஆகியோரின் குறியீட்டெண்.

$$= \frac{\Sigma p_{1k}\left\{\frac{q_{0k}+q_{1k}}{2}\right\}}{\Sigma p_{0k}\left\{\frac{q_{0k}+q_{1k}}{2}\right\}} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma p_{1k}(q_{0k}+q_{1k})}{\Sigma p_{0k}(q_{0k}+q_{1k})} \times 100$$

இம்முறையில் ஒருபுறச் சாய்வு ஏற்படுவதற்கிடமில்லை. ஆனல், எடைகளை அப்போதைக்கப்போது மாற்றவேண்டி வருவதால், இடையில் வரும் ஆண்டுகளுக்குள்ள விலை நிலவரத்தை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியாது.

லாஸ்பயர், பாஷே ஆகியோரின் குறியீட்டெண்களின் பெருக்குச் சராசரியே 'பிஷரின் விழுமியக் குறியீட்டெண்' (Fishe's Ideal Index Number) எனப்படும். எனவே,

$$\text{(8) பிஷரின் விழுமியக் குறியீட்டெண்} \Big\} = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma\, p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma\, p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma\, p_{0k}\, q_{1k}}} \times 100$$

இக் குறியீட்டெண்ணின் பண்புகளைக் கீழ்ப் பகுதியில் ஆராய்வோம்.

குறியீட்டெண்களுக்குரிய பண்புகள்

குறியீட்டெண்கள் உகந்தவை எனக் கருத சில பண்புகளைப் பெற்றிருத்தல் வேண்டும். அவைகளாவன:

(1) பொருள்களின் விலை, வாங்கும் அளவு ஆகியவைகளை வரிசையில் இடம் பெயர்த்து அமைத்தலால் பாதிக்கப்படாமலிருத்தல்.

(2) காலத்தைத் திருப்புதலின் வாயிலாகப் பெறும் குறியீட்டெண், எடுத்த குறியீட்டெண்ணின் தலைகீழ் மதிப்பிற்குச் சமமாக வருதல்.

(3) விலை, பொருள் இவைகளைத் திருப்புவதால், ஏற்படும் குறியீட்டெண்ணை, எடுத்த குறியீட்டெண்ணால் பெருக்க வரும் மதிப்பு, 'உண்மை மதிப்பு விகித'த்திற்குச் (true value ratio) சமமாக வருதல்.

எனவே, இம் மூன்று பண்புகளையும் பொருள் திருப்புச் சோதனை (commodity reversal test), காலத் திருப்புச் சோதனை (time reversal test), விலை, அளவு திருப்புச் சோதனை (factor reversal test) எனச் சோதனைகளாக் கொண்டு' குறியீட்டெண்களின் தரத்தையறியலாம்.

பொருள் திருப்புச் சோதனை (Commodity reversal test)

பொருள்களை எந்த வரிசையாக எடுப்பினும், அதனால் குறியீட்டெண்கள் பாதிக்கப்படாம லிருத்தல் வேண்டும். இச் சோதனையை எல்லாக் குறியீட்டெண்களும் பின்பற்றுகின்றன. ஏனெனில், வரிசை அமைப்பினால் குறியீட்டெண்களின் மதிப்புகள் மாறுது. அதாவது, பொருள்களின் விலைகளையும், அவைகள் எத்தனைமுறை வந்துள்ளன என்பதையும், எவ்வித வரிசை அமைப்பிலும் கொண்டு, குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

காலத் திருப்புச் சோதனை (Time reversal test)

குறியீட்டெண்ணில் காலத்தைக் குறிக்க எழுதப்படும் சின்னங்களைத் திருப்பி அமைத்து உண்டாகும் குறியீட்டெண்ணை, சோதனைக்கு எடுத்துக்கொண்ட குறியீட்டெண்ணுல் பெருக்கி வரும் மதிப்பளவு ஒன்ருக வரவேண்டும். எடுத்துக் கொண்ட குறியீட்டெண்ணை I_{01} எனக் கொண்டால், காலச் சின்னங்களைத் திருப்பும்போது, குறியீட்டெண் I_{10} என்ருகும். எனவே, சோதனை $I_{01} \times I_{10} = 1$ என்ருகிறது.

லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண்ணை எடுத்துப் பரிசோதிப்போம்.

லாஸ்பயரின் விலைக் குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}$

இங்குக் காலத்தைத் திருப்பி அமைத்து உண்டாகும்

குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}$. எனவே இவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}} \neq 1.$$

ஆதலால், லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண் காலத் திருப்புச் சோதனைக்கு இசைந்து நடப்பதில்லை.

அதேபோல், பாஷேயின் விலைக் குறியீட்டெண்

$\dfrac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}$, காலத்தைத் திருப்புவதால் $\dfrac{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}$

என மாறுகிறது. இவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}} \times \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}} \neq 1.$$

எனவே, பாஷேயின் குறியீட்டெண்ணும், காலத் திருப்புச் சோதனைக்கு இசைந்து வருவதில்லை. ஆனுல், பிஷரின் விழுமிய விலைக் குறியீட்டெண்ணைப் பரிசோதனைக் குட்படுத்தும்போது,

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}} \text{ என்பது}$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}} \times \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}} \text{ என மாறுகிறது.}$$

எனவே இவற்றின் பெருக்குத் தொகை

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}} \times \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}} \times \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}} = 1$$

ஆதலால் பிஷரின் குறியீட்டெண் காலத் திருப்புச் சோதனைக்கு இசைந்துள்ளது.

விலை அளவு திருப்புச் சோதனை (Factor reversal test)

ஒரு விலை (அல்லது பொருள்) குறியீட்டெண்ணில் வரும் p, q காரணிகளை (factors), q, p காரணிகளாக மாற்றினால் வந்திடும் பொருள் (அல்லது விலை) குறியீட்டெண்ணை, எடுத்த குறியீட்டெண்ணால் பெருக்கி வரும் மதிப்பு, 'உண்மை மதிப்பு விகிதம்'(true value ratio)ஆகிய $\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}$ க்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

லாஸ்பயரின் விலைக் குறியீட்டெண்ணை எடுத்துப் பரிசோதிப்போம்.

$$\text{லாஸ்பயரின் விலைக் குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}.$$

இங்கு p, q - களை, q - p - களாக மாற்றும்போது, கிடைக்கும்

$$\text{குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma q_{1k}\, p_{0k}}{\Sigma q_{0k}\, p_{0k}}$$

$$= \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}.$$

$$\text{எனவே } \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \neq \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}.$$

ஆதலால் லாஸ்பயரின் விலைக் குறியீட்டெண் 'காரணிகளைத் திருப்பும்' சோதனைக்கு இசைந்து வருவதில்லை. அதேபோல் பாஷேயின் விலைக் குறியீட்டெண் $\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}$, $\frac{\Sigma q_{1k}\, p_{1k}}{\Sigma q_{0k}\, p_{1k}}$ ஆக மாறுகிறது.

$$\text{எனவே } \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}} \neq \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}.$$

ஆதலால் பாஷேயின் குறியீட்டெண்ணும் இச் சோதனைக்குக் கட்டுப்படுவதில்லை.

ஆனால், பிஷரின் விழுமிய விலைக் குறியீட்டெண்

$\sqrt{\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}}$ ஆனது, p, q-களை, q, p-களாக மாற்றும் போது, $\sqrt{\frac{\Sigma q_{1k}\, p_{0k}}{\Sigma q_{0k}\, p_{0k}} \times \frac{\Sigma q_{1k}\, p_{1k}}{\Sigma q_{0k}\, p_{1k}}}$ என்றாகிறது.

இங்கு

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}} \times \sqrt{\frac{\Sigma q_{1k}\, p_{0k}}{\Sigma q_{0k}\, p_{0k}} \times \frac{\Sigma q_{1k}\, p_{1k}}{\Sigma q_{0k}\, p_{1k}}}\,.$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\cancel{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}} \times \frac{\cancel{\Sigma p_{0k}\, q_{1k}}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}} \times \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\cancel{\Sigma p_{1k}\, q_{0k}}}}$$

$= \frac{\Sigma p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma p_{0k}\, q_{0k}}$. ஆதலால் பிஷரின் விழுமிய விலைக் குறியீட்டெண் இச் சோதனையை நிறைவேற்றுகிறது.

எனவே பிஷரின் விழுமிய (விலை)க் குறியீட்டெண் ஒன்றுதான் இம் மூன்று சோதனைகளுக்கும் இசைந்துள்ளதால், இதனையே மிகச் சிறந்த குறியீட்டெண்ணாகக் கருதுகிறோம்.

மாதிரிக் கணக்கு

பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு 1939ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு, 1953ஆம் ஆண்டிற்குரிய எல்லா எடையிட்டக் குறியீட்டெண்களையும் கணக்கிடுவோம்.

பொருள்	1939		1953	
	p_{0k}	q_{0k}	p_{1k}	q_{1k}
A	5	2	10	3
B	3	10	6	25
C	20	3	60	4
D	10	6	15	20

முதலில் பின்வரும் அட்டவணையை அமைத்திடல் வேண்டும்.

பொருள்	1939		1953		$p_{0k}\,q_{0k}$	$p_{1k}\,q_{0k}$	$p_{0k}\,q_{1k}$	$p_{1k}\,q_{1k}$
	p_{0k}	q_{0k}	p_{1k}	q_{1k}				
A	5	2	10	3	10	20	15	30
B	3	10	6	25	30	60	75	150
C	20	3	60	4	60	180	80	240
D	10	6	15	20	60	90	200	300
மொத்தம்					160	350	370	720

(1) லாஸ்பயரின் விலைக் குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma\, p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma\, p_{0k}\, q_{0k}} \times 100$

$$= \frac{350}{160} \times 100$$

$$= 218{\cdot}75.$$

(2) பாஷேயின் விலைக் குறியீட்டெண் $= \dfrac{\Sigma\, p_{1k}\, q_{1k}}{\Sigma\, p_{0k}\, q_{0k}} \times 100$

$$= \frac{720}{370} \times 100 = 194{\cdot}6.$$

(3) பிஷரின் விழுமிய விலைக் குறியீட்டெண் $\Big\} = \sqrt{\dfrac{\Sigma\, p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma\, p_{0k}\, q_{0k}} \times \dfrac{\Sigma\, p_{1k}\, q_{0k}}{\Sigma\, p_{0k}\, q_{1k}}} \times 100$

$$= \sqrt{218{\cdot}75 \times 194{\cdot}6}$$

$$= 206{\cdot}4.$$

மார்ஷல், எட்ஜ்வொர்த் ஆகியோரின் விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட, பின்வரும் அட்டவணையை அமைத்திடல் வேண்டும்.

	p_{0k}	q_{0k}	p_{1k}	q_{1k}	$(q_{0k}+q_{1k})$	$p_{0k}(q_{0k}+q_{1k})$	$p_{1k}(q_{0k}+q_{1k})$
A	5	2	10	3	5	25	50
B	3	10	6	25	35	105	210
C	20	3	60	4	7	140	420
D	10	6	15	20	26	260	390
மொத்தம்						530	1070

மார்ஷல், எட்ஜ்வொர்த் ஆகியோரின் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma\, p_{1k}\,(q_{0k}+q_{1k})}{\Sigma\, p_{0k}\,(q_{0k}+q_{1k})} \times 100 = \frac{1070}{530} \times 100$$

$$= 201{\cdot}9.$$

குறியீட்டெண்ணைத் தொகுப்பதில் கவனிக்கவேண்டிய சிக்கல்கள்

அளவுக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவதில் புள்ளியியலாளர் பின்பற்றும் செயல் முறையைப் பின்வருமாறு அமைத்திடலாம்:

(1) நோக்கமறிந்து குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்துதல்.

(2) பொருள்களை அவைகளின் தரம், எண்ணிக்கை ஆகியவற்றிற்கு ஏற்றவாறு தேர்ந்தெடுத்தல்.

(3) விலைவாசிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

(4) அடிப்படையாகக் கொள்ளும் காலத்தை (ஆண்டை) வரையறுத்தல்.

(5) தகுந்த சராசரியைத் தேர்ந்தெடுத்தலும் குறியீட்டெண்களைப் பரிசோதனைக் குட்படுத்தலும்.

(6) எடைகளை எடுத்தல்.

இவைகளை ஒவ்வொன்றாக ஆராய்ந்திடுவோம்.

குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்தலின் நோக்கம்

எதைப்பற்றி அறிய எண்ணுகிறோமோ, அதற்கேற்ற குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்தல் வேண்டும். ஒரு நாட்டின் மொத்த விற்பனை விலையின் ஏற்றத் தாழ்வுகளை அளவிட, மொத்த விலைக் குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்த வேண்டும். மத்திய வகுப்பைச் சார்ந்தவர்களின் வாழ்க்கை நிலவரத்தையறிய, அவர்கள் சில்லறையாக வாங்கும் பொருள்களின் விலை, குடிக்கூலிக்காக செலவிடும் தொகை, விறகு, கரி முதலிய எரியும் பொருள்கள் ஆகியவற்றின் விலைப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் வரையறுக்கப்பட வேண்டும். இங்கு மொத்த விலைப்பட்டியலைப் பயன்படுத்துதல் கூடாது. பல சில்லறை வியாபாரிகளிடமிருந்து பொருள்களின் விலைகளைக் கண்டு, அவைகள் ஒவ்வொன்றின் சராசரி விலையை எடுத்தல் நலம்.

பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

ஒவ்வொரு பொருளும் தரத்தில் மாறுபட்டுள்ளது. எனவே, ஒவ்வொரு தரத்திலும் வாங்கும் பொருள்களின் தனித்தனி அளவுகளை அறிந்திடல் வேண்டும். மேலும், பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, மக்களின் மிகுதியோரால் வழக்கமாக விரும்பப்படும் பொருள்களாக இருத்தல் வேண்டும். பொருள்களில் சில ஆக்கியோர் பொருள்களாகவும் (producer's goods), மற்றும் சில பயனீட்டாளர் பொருள்களாகவும் (consumer's goods) இருக்கும். இவற்றின் வேற்றுமையை உணர்ந்து, ஏற்ற பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல் வேண்டும். மேலும் எத்தகைய குறியீட்டெண் தொகுக்கப்பட வேண்டும் என்பதற்குரிய பொருள்களின் விலைகளும், வாங்கின அளவுகளும் தான் குறியீட்டெண் அளவெடுப்பில் இடம்பெற வேண்டும். அங்ஙனமே இயந்திரத் தொழிலில் பல பொருள்கள் விளைவிக்கப்படுகின்றன. இவைகளுக்கும் கச்சாப் பொருள்களுக்கும் உள்ள வேற்றுமையை அறிந்திடல் வேண்டும். மற்றும் சில பொருள்கள் வேளாண்மை, பண்ணை உற்பத்திப்பொருள்களாவும், கனிப்பொருள்களாகவும், உயிரினங்களிலிருந்து கிடைக்கும் (animal products) பொருள்களாகவுமுள்ளன. எனவே, பொருள்களைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்திடல் வேண்டும். அப்போதுதான் ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள பொருள்களனைத்தும் ஒரே சீரான தன்மையைப் பெறும். எந்தெந்தப் பிரிவுகளிலுள்ள பொருள்கள் குறியீட்டெண் தொகுப்புக்கு ஏற்றவைகளோ, அவைகளைத்தான் மாதிரித் தேர்வுகளின்மூலம் ஒவ்வொரு பிரிவிலிருந்தும் போதிய அளவுக்குத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

பொருள்களின் விலைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

மொத்தமாக விற்பனை செய்யும் வியாபாரிகளிடத்தில் மொத்த விலை விற்பனைப் பட்டியல்கள் கிடைக்கும். சில்லறை வியாபாரி களிடத்தில் பொருள்களின் சில்லறை விலைப் பட்டியலுண்டு. சில்லறை விலைப்பட்டியல்களில் வரும் பொருள்களின் விலை, மொத்த விலைப்பட்டியலில் வரும் அதே பொருள்களின் விலையைவிட சற்று அதிகமாகவே யிருப்பதை எல்லோரும் அறிவர். எனவே, பொருள் களைப் பயன்படுத்துவோரின் நிலைமை அறிந்து, அதற்கேற்ப பொருள் களின் விலைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

ஒரு நாட்டில் பொருள்களுடைய மொத்த விலைகளின் போக்கை அறிய, மொத்த வியாபாரிகள் குறிப்பிடும் விலைப்பட்டியலைத்தான் பயன்படுத்தல் வேண்டும். ஆனால், தொழிலாளர்களின் குடும்ப வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடும்போது, அவர்களால் பெரும்பாலும் விரும்பப்படும் பொருள்களையும் அவற்றின் சில்லறை விலைகளையுமே எடுக்கவேண்டும். இவர்கள் பயன்படுத்தும் பொருள் களைப் பின்வருமாறு பிரித்திடலாம். உணவுப் பொருள்களை சைவ, அசைவப் பொருள்கள், பழவகைகள், காய்கறிகள் என்ற உட்பிரிவுக ளாகப் பிரித்திடலாம்.

ஒவ்வொரு பிரிவிலும், பொருள்களை அவற்றின் தரத்திற்கு ஏற்ற வாறும், வாங்கும் அளவுக்கு ஏற்றவாறும் விலைகளைக் கண்டுகொள் ளல்வேண்டும். பொருள்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஏற்ற எடைகளையும் எடுத்தல் வேண்டும்.

அவ்விதமே அவர்கள் பயன்படுத்தும் எரிபொருள்களை விறகு, கரி, மண்ணெண்ணெய், மின்வலி (electricity) - எனப் பிரித்திட லாம். இவைகளின் விலைகளையும் மாதிரித் தேர்வினால் கண்டு கொள்ளல் வேண்டும்.

அடிப்படைக் காலத்தை வரையறுத்தல்

பொதுவாக, காலப் பகுதியை ஓராண்டாகக் கருதுவது வழக்கம். ஏதாவதோர் ஆண்டில் பொருள்களின் விலைவாசிகளின் நிலவரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மற்ற ஆண்டுகளில் விலைகளில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளைக் கணக்கிடலாம். அவ்விதம் எடுக்கப்படும் அடிப் படை ஆண்டு (base year), சில பண்புகளைப் பெற்றிருத்தல்வேண்டும். (*a*) அடிப்படை ஆண்டு பஞ்சம், வெள்ளம், உள்நாட்டுக் குழப் பங்கள் அல்லது வெளிநாட்டுப் போர்கள் ஆகியவற்றால் பாதிக்கப் படாமலிருத்தல் வேண்டும். (*b*) அவ்வாண்டில் எங்கும் அமைதி

நிலவவேண்டும். (c) பொருளாதார, அரசியல் துறைகளில் குழப்பங்கள் இல்லாமலிருத்தல் வேண்டும். (d) பொருள்களின் உற்பத்தி, விலைவாசிகள் முதலியன ஒழுங்கான நிலையிலமைந்திருத்தல் வேண்டும்.

ஒரு நிலையான ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொள்வதற்குமாறாக, ஒவ்வோர் ஆண்டின் நிலவரத்தை, அதற்கு முன் வரும் ஆண்டின் நிலவரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டும் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

இங்கு அடிப்படை ஆண்டு மாறுமியல்புடையதால், அவ்வப்பொழுது ஓராண்டின் நிலவரத்தை, அதற்கு முன்வரும் ஆண்டின் நிலவரத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியும். மேலும், காலப்போக்கில் சில பொருள்கள் முக்கியத்துவத்தை இழக்க நேரிடலாம். இன்னும் சில புதிய பொருள்கள் விரும்பப்படலாம். எனவே, இவ்வித அமைப்பில் வேண்டாத பொருள்களை அகற்றவும், தேவையான பொருள்களைச் சேகரித்துக்கொள்ளவும் முடியும்.

ஏற்ற சராசரிகளைப் பயன்படுத்தல்

கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணில் விலை உயர்வுள்ள பொருள்களுக்கு அதிக முக்கியத்துவமும், குறைந்த விலையுள்ள பொருள்களுக்குக் குறைவான முக்கியத்துவமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும், கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண், காலத்திருப்புச் சோதனைக்கு இசைவதில்லை. தவிரவும் இக் குறியீட்டெண் மேல் நோக்கிய ஒருபுறச் சாய்வைப் பெற்றுள்ளது. எனவே, மொத்தத்தில் இச் சராசரியைத் தனியாகப் பயன்படுத்துவதில்லை. அவ்விதமே ஹார்மானிக் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுவது கடினம். இது கீழ் நோக்கிய ஒருபுறச் சாய்வைப் பெற்றுள்ளது. எனவே, இவ்விரண்டு சராசரிகளைக் காட்டிலும், பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணே, பெரும்பாலும் நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஏனெனில், பெருக்குச் சராசரி விகித மாற்றங்களுக்கு ஒரே சீரான முக்கியத்துவம் கொடுக்குமியல்புடையது. மேலும், இது குறைந்த விலைப் பொருள்களுக்கு அதிக முக்கியத்துவமும், உயர்ந்த விலைப் பொருள்களுக்கு சற்றுக் குறைவான முக்கியத்துவமும் அளிக்கிறது.

பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண் காலத்திருப்புச் சோதனை, விலை, அளவு திருப்புச் சோதனைகளுக்கு இசைந்துள்ளது. இக் குறியீட்டெண் கணக்கெடுப்பில் அவ்வப்போது முக்கியத்துவத்தை இழந்த பொருள்களை விலக்கவும், புதிய பொருள்களைச் சேர்த்துக் கொள்ளவும் முடியும்.

எடைகளை எடுத்தல்

பொதுவாக, விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடும்போது, பொருள்களின் உற்பத்தி அளவுகளை எடைகளாகக் கொள்ளலாம். இவற்றின் விவரங்கள் கிடைக்காவிட்டால், பொருள்கள் விற்பனைக்கு வரும் அளவுகளை எடைகளாக மேற்கொள்ளலாம். வாழ்க்கை அளவுக் குறியீட்டெண் எவ்வகுப்பினருக்குத் தொகுக்கப்படுகிறதோ, அவ் வகுப்பினர் வழக்கமாக விரும்பி வாங்கும் பொருள்களின் அளவுகளை எடைகளாகக் கொள்ளவேண்டும். வழக்கத்தில், வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் தொகுப்பில், பொருள்களைப் பல சீரான பிரிவுகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் நிலையான எடைகள் கொடுக்கப்படும்.

வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள்

இந்தியாவில் முக்கியமாக, மூன்றுவித வகுப்பினருக்குரிய வாழ்க்கை நிலவரத்தை யறிய, குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட விசாரணைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன. அவ்வகுப்பினர்களாவது : (1) மத்திய அரசாங்கத்து ஊழியர்களின் வாழ்க்கை நிலைக்குரிய செய்திகள். (2) நடுத்தர வகுப்பைச் சார்ந்தவரின் வாழ்க்கை நிலைக்குரிய செய்திகள். (3) உழைப்பாளி வகுப்பினருக்கான வாழ்க்கை நிலவரக் குறியீட்டெண்கள். பெரும்பாலும், தனிப்பட்ட வகுப்பினருக்குக் கொடுக்கப்படும் பஞ்சப்படியை நிர்ணயிப்பதும், சில்லறைப் பொருள்களின் விலைவாசிகளில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளை அளவிட்டுக் கூறுவதுமே வரவு செலவுத் திட்ட விசாரணைகளின் நோக்கமாகும். முதலிரண்டு வகுப்பினருக்கென அவ்வப்போது தனிப்பட்ட, குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட விசாரணைகள்தான் நடைபெறுகின்றனவேயன்றி, அவர்களுக்கென வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள் தொகுக்கப்படுவதில்லை. உழைப்பாளி வகுப்பினருக்காகவே வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள் தொகுக்கப்படுகின்றன.

உழைப்பாளி வகுப்பினருக்கான வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைத் தொகுக்கும் முறை

மத்திய அரசாங்கத்தின்கீழ் நியமிக்கப்பட்டுள்ள தொழிலாளி அலுவலகம், இவ்வகைக் குறியீட்டெண்களைத் தொகுத்து வெளியிடுகிறது.

உறுப்பினர்களின் தேர்வு

வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களில் தேவைப்படும் உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் எளிதல்ல. மக்களால் செலவிடப்படும் தொகைகளின் வகைகள் பலதரப்பட்டவை. இவற்றினை அறிவதற்கு அந்-

தந்தக் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டங்களில், விசாரணைகள் நடத்த வேண்டும். செலவிடப்படும் தொகையானது, வருவாய்க்கேற்ற வாறும், இடத்திற்கிடமும் மாறும் இயல்புடையது. எனவே, நம் சௌகரியத்திற்காக செலவினங்களைப் பிரித்து, குறியீட்டெண்களைத் தொகுப்பது வழக்கம்.

1. உணவுப் பொருள்களும், குடிவகைகளும் (Food and drinks)

பொருள்கள்				அளவு	விலை
அரிசி, அதிலிருந்து தயாரிக்கப்படும் உணவு வகைகள்	...	...	...	...	...
கோதுமை, அதிலிருந்து தயாரிக்கப்படும் உணவு வகைகள்	...	...	...	...	...
மற்ற தானிய வகைகள்		...	...	...	...
பால்	...	...	...	...	...
நெய்	...	...	...	...	...
பாலிலிருந்து தயாரிக்கப்படும் உணவுப் பொருள்கள்	...	...	...	...	...
பருப்பு வகைகள்	...	...	...	...	...
எண்ணெய், எண்ணெய் வித்துகள்			...	...	...
(எண்ணெய் வகைகள் : (1) கடுகு எண்ணெய், (2) தேங்காயெண்ணெய், (3) நல்லெண்ணெய், (4) கடலை எண்ணெய், (5) டால்டா, வனஸ்பதி வகைகள்.)					
காய்கறிகள்	...	...	...	...	...
பழ வகைகள்	...	...	...	...	...
மாமிச வகைகள், மீன் வகைகள், முட்டைகள்				...	...
சர்க்கரை	...	...	...	...	...
உப்பு	...	...	...	...	...
வெற்றிலை, பாக்கு	...	...	...	...	...
வாசனைத் திரவியங்கள் (spices)			...	...	...
புகையிலை, சிகரெட்டுகள்		...	...	...	...
மருந்து, போதை தரும் பொருள்கள்			...	...	...
குடிநீர், சிற்றுண்டிப் பொருள்கள்			...	...	...
மற்றவை	...	...	...	...	...
மொத்தம்			...	...	...

2. எரிபொருள்கள், விளக்கெரிக்கும் பொருள்கள்

விவரம்				அளவு	விலை
சுட்ட நிலக்கரி	...	...	...	...	...
நிலக்கரி ...	...	...	...	...	...
விறகு ...	...	...	...	...	...
மண்ணெண்ணெய்	...	...	...	...	...
பெட்ரோல் ...	...	...	...	...	...
ஸ்பிரிட்டு (spirit)	...	...	...	...	...
மின்சார ஒளி	...	...	...	...	...
		மொத்தம்	...	...	...

3. குடிக்கூலி (House rent)

வாடகை	பழுது பார்த்தல்	மொத்தம்
...	...	...
...	...	...
...	...	...

4. ஆடை வகைகள் (Clothing)

ஆடைகள்			எண்ணிக்கை	விலை
வேட்டிகள் (கைத்தறி, மில்)		...	...	...
கதராடைகள்	...	...	...	...
மில் துணி வகைகள்	...	...	...	...
கைத்தறிப் புடவைகள்	...	...	...	...
கதர்ப் புடவைகள்	...	...	...	...
மில் புடவைகள்	...	...	...	...
தட்டுமுட்டுப் பொருள்கள் (furniture)	...	...	...	...
மிதியடிகள்	...	...	...	...
தையற்கூலி	...	...	...	...
சலவைக்கூலி	...	...	...	...
மற்றவை ...	...	...	...	...
	மொத்தம்	...	...	...

5. ஊர்தி வகைகள் (Conveyance)

வீட்டிலிருந்து வேலைக்கும், மற்ற இடங்களுக்கும் போய்வரப் பயன்படுத்தப்படும் ஊர்தி வகைகளாவன :

புகைவண்டி - சீசன் டிக்கட்
துவிச்சக்கர வண்டி
குதிரை வண்டி
பஸ், டிராம்
ரிக்ஷா வண்டி
உந்து வண்டி.

6. கல்வி

பொருள்கள்			எண்ணிக்கை	விலை
புத்தகங்கள்	...	...	...	...
செய்தித்தாள்கள்	...	...	...	...
பத்திரிகைகள்	...	...	...	...
எழுதுவதற்கான தாள்கள்		...	...	...
மொத்தம்		...	...	...

7. பொழுது போக்கு

பட்க் காட்சி
நாடகம்
மற்றவை

8. மருந்தும், மருத்துவச் செலவும்

மருந்துகள்		எண்ணிக்கை	விலை
மேல்நாட்டு மருந்துகள்	...	...	...
ஹோமியோபதி மருந்துகள்	...	...	...
ஆயுர்வேத வைத்திய மருந்துகள்	...	...	...
மொத்தம்	...	...	...

9. ஒப்பனைக்குரிய பொருள்கள் — (Toilet)

10. மற்றவை (சேமிப்பு, தர்மம், நன்கொடை, தபால் செலவு)

(பெரும்பாலும் வருமானவரி, மற்றத் தொழில்களின் வரி, வட்டி, ஆயுள் இன்ஷ்யூரன்ஸின் பிரிமியம், பாங்கு சேமிப்பு முதலியவைகள் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களில் செலவினங்களாகச் சேர்க்கப்படுவதில்லை.)

எடையிடும் முறை

ஒவ்வொரு வகுப்பினரின் விருப்பம், தேவை, வருமானம் முதலியவற்றால் வாங்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகள் மாறக்கூடும்.

எனவே, மேற்சொன்ன ஒவ்வொருவகைச் செலவினங்களுக்கும் ஏற்ற எடைகளைக் கொடுக்கவேண்டும். பொதுவாக, ஓராண்டில் செலவாகும் தொகைகளுக்குரிய விவரங்களைத் தெரிவிக்குமாறு, விசாரணைகளை மேற்கொள்ளவேண்டும். தவிரவும், குடும்ப வரவு செலவினங்களால் வாங்கப்படும் பொருள்கள், சில்லறைகளாக வாங்கப்பட்டவைகளாகவே காணப்படும். ஆதலால், சில்லறை விலைப்பட்டியலிலிருந்துதான், பொருள்களின் விலைகளைத் தீர்மானிக்கவேண்டும். மேலும், பொருள்களின் தரத்திற்கேற்றவாறும், அவைகளின் விலைகளைக் கண்டுகொள்ளல்வேண்டும். சில்லறைப் பட்டியல்களில், பொருள்களின் விலைகள்தான் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

சில்லறை வியாபாரிகளிடம் பொருள்களை வாங்கும்போது, அவர்கள் விற்பனை வரியையும் வசூலிப்பதால், இதையும் பொருள்களின் விலைகளுடன் சேர்த்துக்கொள்ளவேண்டும். பொருள்களின் விலைகளில் தள்ளுபடி செய்வதையும், கணக்கிடுவதில் ஏற்றுக்கொள்ளவேண்டும். விலைக் கட்டுப்பாடுகள் இருந்தபோதிலும், உண்மையாக மக்கள் கொடுத்து வாங்கும் பொருள்களின் விலைகளையே மேற்கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரிக் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட விசாரணைகள்

மக்களின் முழுக் கணிப்பு விவரங்கள் எடுப்பதைப்போல, குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டங்களை அறிவதற்குப் பெரிய விசாரணைகளை மேற்கொள்ள முடியாது. ஐக்கிய நாட்டுப் புள்ளியியலின் சிறப்புக் குழுவும் இதையே வற்புறுத்தியுள்ளது. எனவே, வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைத் தொகுப்பதற்கு, ஒழுங்கான மாதிரிக் கூறெடுத்தலின்றியமையாததாகும். ஒருபுறச் சாய்வுக்கு இடமளிக்காமலும், சேகரித்த செய்திகளிலிருந்து யூகப் பிழையைக் (probable error) கணக்கிடுவதற்கேற்றவாறு அமையுமாறும், கூறெடுத்தல் வேண்டும்.

மாதிரிக் குடும்பங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் செயல்முறை, கணக்கெடுத்தல், செய்திகளைத் தகுந்த அட்டவணையிலிடுதல் முதலியவற்றைப் புள்ளியியல் வல்லுநரின் உதவியைக் கொண்டு மேற்கொள்ளுதல் நலம்.

வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்

அந்தந்த வகுப்பைச் சேர்ந்த மக்களுக்கெனத் தொகுக்கப்பட்ட குறியீட்டெண்கள், அவ்வகையினரின் விருப்பம், தேவை, வழக்கம் முதலியவற்றின் அமைப்பு முறையைத் தெரிவிக்கிறது. அவர்கள் செலவிடும் வகைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களை அவ்வப்போது கவனமாக ஆராய்ந்து, வணிகத் தொழில், இயந்திரத் தொழில்களில் ஈடுபடுவோரின் சம்பளம், கைம்மாறு, மிகை ஊதியம் (bonus), பஞ்சப்படி

முதலியவைகளைத் தீர்மானிப்பதில் பெரிதும் உதவுகின்றன. மேலும், மக்கள் பொருள்களை வாங்குவதற்குச் செலவிடும் பணத்தின் ஆற்றலை ஒருவாறு அளவிடுவதிலும் பயன்படுகின்றன. தவிரவும், இக் குறியீட்டெண்கள் நாட்டு மக்களின் பொருளாதார நிலையை எடுத்துக் காட்டுவதிலும் உதவிபுரிகின்றன.

இந்தியக் குடியரசில் தொகுக்கப்பட்டுவரும் சில வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களின் வகைகள்

பெரும்பாலும், இக் குறியீட்டெண்கள் யாவும், தொழிலாளி வகுப்பைச் சார்ந்தவருக்காகவே தொகுக்கப்பட்டவை. மத்திய அரசாங்கத் தொழில் துறை இலாகாக்களும், சில மாநில அரசாங்கத்தார்களும் பயன்படுத்துவோர் விலைக் குறியீட்டெண்களை, மாதத்திற்கொருமுறையாகவோ வாரத்திற்கொரு முறையாகவோ தொகுப்பர். மத்திய அரசாங்கத் தொழில் இலாகாவில், ஒரு பிரிவின் தொழில்துறை அலுவலகம் (Labour Bureau), மாதந்தோறும் ஒரு சில குறிப்பிட்ட நகரங்களில் தொகுக்கப்பட்ட தொழிலாளர்களின் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களை வெளியிடுகிறது. இதைத்தவிர மாநில அரசாங்கத்தார்களும், அந்தந்தப் பகுதியிலுள்ள ஒரு சில முக்கிய நகரங்களின் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைத் தொகுத்து, வாரத்திற் கொருமுறை வெளியிடுகிறார்கள். இந்தியக் குடியரசு முழுவதிலும் 50 இடங்களில் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள் தொகுக்கப்படுகின்றன. தொழில் இலாகா அலுவலகத்தாரால் வெளியிடப்பட்ட வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களின் அடிப்படை ஆண்டை 1945ஆம் ஆண்டாகக் கொண்டுள்ளனர். இக் குழு, குறியீட்டெண்களைத் தொகுப்பதற்கு, ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் பின்வரும் எடைகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளது.

	எடை (சதவீதத்தில்)
உணவு வகைகள்	65
எரிபொருள் வகைகள்	8
குடிக்கூலி	4
ஆடை வகைகள்	10
மற்றவை	13
மொத்தம் ...	100

சென்னை அரசாங்கத்தாரால் வெளியிடப்பட்டுள்ள வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள்

தற்சமயம் சென்னை அரசாங்கத்தில் புள்ளியியல் இயக்குநரால் (Director of Statistics), சென்னை, கடலூர், திருச்சி, மதுரை, கோவை ஆகிய 5 முக்கிய நகரங்களுக்குரிய வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள் வெளியிடப்படுகின்றன.

சென்னை நகரத்திற்குரிய தொழிலாளர்களின் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள்

1935ஆம் ஆண்டு ஜூலை மாதத்திலிருந்து, 1936ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதம் வரை, சென்னை, செங்கற்பட்டு ஆகிய இடங்களில் 50 ரூ. க்குக் கீழ் மாத வருமானமுள்ள தொழிலாளிக் குடும்பங்களிலிருந்து, ஒரு ஒழுங்குபட்ட மாதிரித் தேர்வின் வாயிலாக, 641 குடும்பங்களின் வரவு செலவுத்திட்ட விசாரணைகள் நடத்தப்பட்டன. தொழிலாளர்களின் தேவை, விருப்பம், வருவாய்க்கேற்றவாறு செலவின் விவரங்களை உணவு, எரிபொருள்கள், குடிக்கூலி, ஆடைகள், மற்றவை என 5 பிரிவுகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் வரும் உறுப்புகளுக்குப் பின்வருமாறு எடைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. உணவுப் பொருள்கள்

		எடை (சதவீதத்தில்)
(1)	அரிசி	45·11
(2)	ராகி	1·60
(3)	பருப்பு	2·91
(4)	காய்கறி வகைகள் ...	8·00
(5)	மீன்கள்	5·43
(6)	மாமிசம்	8·24
(7)	தேங்காய்	1·18
(8)	பால்	6·77
(9)	உப்பு	1·24
(10)	மிளகாய்	2·26
(11)	புளி	1·93
(12)	மஞ்சள்	0·92
(13)	கொத்தமல்லி ...	0·39
(14)	கடுகு	0·39
(15)	பூண்டு, வெங்காயம் ...	1·18
(16)	தேங்காய் எண்ணெய் ...	1·24
(17)	எள் எண்ணெய் ...	4·97
(18)	நெய்	1·56
(19)	சர்க்கரை	1·37
(20)	வெல்லம்	1·64
(21)	காப்பி	1·41
(22)	டீ	0·26
	மொத்தம் ...	100·00

2. எரிபொருள்கள்

	எடை (சதவீதம்)
விறகு	74·21
கரி	3·39
மண்ணெண்ணெய்	19·68
தீப்பெட்டி	2·72
மொத்தம் ...	100·00

3. ஆடை வகைகள்

வேட்டிகள்	22·50
ஷர்ட்டுகள்	16·88
மேல் அங்கவஸ்திரங்கள்	6·25
புடவைகள்	45·31
மாதர்களின் ரவிக்கைகள்	9·06
மொத்தம் ...	100·00

4. வீட்டு வாடகை 100

5. மற்றவை

பாக்கு	6·00
வெற்றிலை	10·02
கல்வி	11·71
சலவை, சோப்பு	13·42
முடிதிருத்தல்	11·62
போக்குவரவு	5·10
புகையிலை	19·25
பீடி	10·01
பொழுது போக்கு	6·61
மருத்துவம், மருந்துச் செலவு ...	6·26
மொத்தம் ...	100·00

ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் எடைகள் பின் வருமாறும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

				எடை
உணவு	...	...	...	58
எரிபொருள்கள்	...	...	...	8
ஆடை வகைகள்	...	...	...	6
குடிக்கூலி	...	...	...	15
மற்றவை	...	...	...	13
		மொத்தம்	...	100

பொருள்களின் தரம், சில்லறைப் பட்டியலின் விலை (விற்பனை வரி உள்பட) முதலிய விவரங்கள், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சில்லறை வகைக் கடைகளில் வாரம் இரு முறையாகக் கணக்கிடப்பட்டுத் தொகுக்கப்படுகின்றன. குடிக்கூலியின் விவரம், 6 மாதத்திற்கொரு முறையாகக் கணக்கெடுக்கப்படுகிறது.

1935ஆம் ஆண்டு ஜூலை மாதத்திலிருந்து, 1936ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதம் வரையில் பொருள்களின் சராசரி விலைகள் அடிப்படையாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

ஒவ்வொரு வாரமும், பொருள்களின் சராசரி விலையைக்கண்டு, அதை அடிப்படை ஆண்டில் நிலவியிருந்த விலையின் சதவீதமாகத் தெரிவிக்க வேண்டும். இவைகளே விலைச் சார்பிகளாகும். பிரிவில் வரும் ஒவ்வொரு பொருளையும் வாங்குவதில் 'செலவிடும் தொகையை மொத்தச் செலவின் சதவீதமாகத் தெரிவித்து உண்டாகும் எண்ணிக்கைகளை எடைகளாக மேற்கொண்டு, விலைச் சார்பிகளை இவ்வெடைகளால் பெருக்கவேண்டும். இப் பெருக்குத் தொகையை 100ஆல் வகுக்க, ஒவ்வொரு பிரிவிற்குரிய குறியீட்டெண்கள் கிடைக்கும்.

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் செலவிடப்படும் தொகையை, மொத்தச் செலவின் சதவீதமாகக் கணக்கிட்டு, இவைகளைப் பிரிவுகளின் எடைகளாகக் கொள்ளவேண்டும். பிரிவுக் குறியீட்டெண்ணையும், பிரிவு எடையையும் பெருக்கி வரும் கூடுதலை 100ஆல் வகுத்து வரும் எண் மதிப்பே வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணாகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில், ஓர் உழைப்பாளி குடும்பத்தின் பிரிவுக் குறியீட்டெண்களும், எடைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு		குறியீட்டெண்	எடை
உணவு	...	350	48
எரிபொருள்	...	225	10
ஆடை	...	240	8
குடிக்கூலி	...	160	12
மற்றவை	...	180	15

முதலில் பின்வரும் பட்டியலை அமைத்திடுவோம்.

பிரிவு	குறியீட்டெண் x	எடை w	$w \times x$
உணவு	350	50	17,500
எரிபொருள்	225	10	2,250
ஆடை	240	8	1,920
குடிக்கூலி	160	12	1,920
மற்றவை	180	15	2,700
மொத்தம்	...	95	26,290

$$\text{வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w} = \frac{26290}{95} = 276{\cdot}74$$

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில், குறியீட்டெண்களும் எடைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எடையிட்ட சராசரி குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

குறியீட்டெண் :	133	141	125	173	182
எடை :	5	4	7	1	3

$$\left.\begin{array}{l}\text{சராசரிக்}\\ \text{குறியீட்டெண்}\end{array}\right\} = \frac{133 \times 5 + 141 \times 4 + 125 \times 7 + 173 \times 1 + 182 \times 3}{20}$$

$$= \frac{2823}{20}$$

$$= 141{\cdot}15.$$

1936ஆம் ஆண்டு, ஜூலை மாதத்தை அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு, 1950ஆம் ஆண்டு நவம்பர் மாதம், 1952ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு மாதம் ஆகியவைகளுக்குரிய குறியீட்டெண்கள் முறையே 330, 343 என்றால், 1950ஆம் ஆண்டு, நவம்பர் மாதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, 1952ஆம் ஆண்டு, மார்ச்சு மாதத்தின் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

1936ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதம், 1950ஆம் ஆண்டு நவம்பர் மாதம், 1952ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு மாதம் ஆகிய காலத்தை 0, 1, 2 எனக் குறிப்பிடவும். எனவே,

$$I_{2.0} = I_{2.1} \times I_{1.0}$$

$$343 = (I_{2.1}) \times 330$$

$$I_{2.1} = \frac{343}{330}$$

$$= 1{\cdot}0397.$$

எனவே, 1950ஆம் ஆண்டு, நவம்பர் மாதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, குறியீட்டெண்ணை 100 எனக் கொண்டால், 1952ஆம் ஆண்டு, மார்ச்சு மாதத்தின் குறியீட்டெண், $1{\cdot}0397 \times 100 = 103{\cdot}97$ என்றாகும்.

வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள் யாவை? பின்வரும் செய்திகளுக்கு, வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

பிரிவு	விலை		எடை
	அடிப்படை ஆண்டு	தற்போதைய ஆண்டு	
உணவு	39	47	4
எரிபொருள்	8	12	1
ஆடை	14	18	3
குடிக்கூலி	12	15	2
மற்றவை	25	30	1

முதலில் பின்வரும் பட்டியலை அமைத்திடவும்.

பிரிவு	விலை		எடை	$p_0 q_0$	$p_1 q_0$
	p_0	p_1	q_0		
உணவு	39	47	4	156	188
எரிபொருள்	8	12	1	8	12
ஆடை	14	18	3	42	54
குடிக்கூலி	12	15	2	24	30
மற்றவை	25	30	1	25	30
மொத்தம்	...	...	...	255	314

எடையிட்ட வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{314}{255} \times 100$$

$$= 123{\cdot}13$$

பயிற்சிகள்

1. குறியீட்டெண்கள் என்றால் என்ன ? அவைகளின் பயன்களை விவரி.

2. எப்போது குறியீட்டெண்களைச் சிறந்தவைகளாகக் கருதலாம் ? 'லாஸ்பயர்', 'பாஷே', 'பிஷர்' ஆகியோரின் குறியீட்டெண்களை விவரி.

3. குறியீட்டெண்களைத் தொகுப்பதில் புள்ளியியலாளர் பின்பற்றும் செயல்முறையை விளக்குக.

4. நிலைக் குறியீட்டெண்கள், சங்கிலிக் குறியீட்டெண்கள் யாவை ?

5. தேயிலைத்தோட்டத் தொழிலாளர்களின் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்களை அறிவிக்கும் பட்டியல் பின்வருமாறு :

ஆண்டு	குறியீட்டெண் அடிப்படை ஆண்டில் (1944-ல்) = 100
1946-47	100
1947-48	106
1948-49	120
1949-50	134
1950-51	137
1951-52	139
1952-53	145
1953-54	142
1954-55	146

இதனை வரைபடமூலம் விளக்குக.

6. குறியீட்டெண்ணை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்பதைக் கீழ்வரும் செய்தியைக் கொண்டு விளக்குக. சணலின் மொத்த விலைப் பட்டியல் 1914-லிலிருந்து, 1930-வரை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	(ஒரு பேல்) சணலின் விலை (ரூ.-ல்)	ஆண்டு	விலை (ரூ.-ல்)
1914	78	1922	88
1915	54	1923	78
1916	67	1924	76
1917	56	1925	112
1918	72	1926	99
1919	102	1927	76
1920	98	1928	75
1921	94	1929	71
		1930	50

7. பின்வரும் விவரங்களுக்கு லாஸ்பயர், பாஷே, பிஷர் ஆகியோரின் குறியீட்டெண்களைக் காண்க.

ஆண்டு	அரிசி		கோதுமை		பருப்பு	
	விலை (ரூ.-ல்)	அளவு (படியில்)	விலை (ரூ.-ல்)	அளவு (படியில்)	விலை (ரூ.-ல்)	அளவு (படியில்)
1950	1·00	50	0·75	12	1·25	20
1955	1·25	44	1·00	8	1·50	15

இங்கு 1950ஆம் ஆண்டை, அடிப்படை ஆண்டாகக் கொள்ளவும்.

(விடை : லாஸ்பயரின் குறியீட்டெண் = 124·1
பாஷேயின் ,, = 124·3
பிஷரின் ,, = 124·2)

8. 1939ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு 1953ஆம் ஆண்டிற்குரிய எல்லா எடையிட்ட குறியீட்டெண்களையும் கணக்கிடுக.

பொருள்	1939		1953	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	4	1	10	2
B	1	10	4	25
C	20	2	90	3
D	10	5	15	20

9. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைத் தொகுக்கும் முறையினை விளக்குக. பின்வரும் செய்திக்குப் பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		தற்போதைய ஆண்டு	
	விலை (ரூ.-ல்)	அளவு (மணங்கில்)	விலை (ரூ.-ல்)	அளவு (மணங்கில்)
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

16. காலத் தொடர் வரிசை

(Time Series)

கால வேறுபாட்டால் ஒரு மாறி பல மதிப்புகளை ஏற்கக்கூடும். ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அல்லது காலப் பகுதியில் மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை வரிசையாக அமைத்து உண்டாகும் தொடரையே 'காலத் தொடர் வரிசை' எனக் கூறுவது வழக்கம். காற்றின் அழுத்தத்தை நாள்தோறும் காலை 6 மணி, பகல் 12 மணி, மாலை 6 மணி ஆகிய நேரங்களில் கண்டு அவைகளை ஒரு காலத் தொடர் வரிசையாக அமைத்திடலாம். பொருள்களின் விலைகளை ஒவ்வொரு நாளும் அல்லது வாரத்திற்கொருமுறையாகக் கண்டு காலத்திற்கேற்ப வரிசையாக அமைத்து ஒவ்வொரு பொருளின் காலத்தொடர் வரிசையை அமைத்திட முடியும். வரிசைத் தொடரில் உள்ள மதிப்பு களை ஆராய்ந்து அவைகளின் போக்கை அறிவதே நமது நோக்க மாகும்.

பொதுவாக, காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கைப் பின்வருமாறு பிரித்தாராய்வது வழக்கம் : (1) பொதுவான போக்கு (General trend or Secular trend); (2) சுழற்சியாக வரும் நிகழ்ச்சிகளின் போக்கு (Cyclical trend); (3) பருவ காலத்திற்குரிய மாறுபாடுகள் (Seasonal variations); (4) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் (Random of unsystematic fluctuations).

பொதுவான போக்கு

பத்தாண்டுகளுக் கொருமுறையாக ஒரு நாட்டின் இயந்திரத் தொழில்களின் வளர்ச்சியை ஆராயும்போது, அவைகள் படிப்படியாக முன்னேறி யிருப்பதன் பொதுவான போக்கை அறியலாம். மக்கள் தொகை அதிகரித்துக் கொண்டு வருவதாலும், அறிவியல் ஆராய்ச்சி களில் புதிதாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட முறைகளைப் பயன்படுத்துவ தாலும் காலப்போக்கில் தொழில், விவசாயத் துறைகளில் முன்னேற்

றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. தவிரவும், முறையான நிர்வாகத்தாலும், வேலையில் ஈடுபட்டுள்ள அங்கத்தினர்களின் திறமையாலும், தொழில் துறைகள் வளர்ச்சியடைந்துள்ளன.

ஆனால், மக்களின் தேவை, விருப்பம் ஆகியவற்றால் சில சமயங்களில் ஒரு சில தொழில்கள் வளர்ச்சியுறுவதையும், மற்றும் சில தொழில்கள் தேய்ந்து போதலையும் உடனடியாக அறிய இயலாவிட்டாலும், ஒரு சில ஆண்டுகளுக்குப்பின் பொதுவாகத் தீர்மானிக்க முடியும். காலப்போக்கில் ஒரு தலைமுறையில் விரும்பப்பட்ட பொருள்கள் அடுத்துவரும் தலைமுறையிலுள்ள மக்களால் விரும்பப்படுமென எதிர்பார்க்க முடியாது. முன்பெல்லாம் போக்குவரத்து ஆற்றுக் கால்வாய்களின் வழியாகவும், சிறிய சாலைகளின் வழியாகவும் நடைபெற்றது. அப்போது பாய்மரக் கப்பல்களும், சிறு தோணிகளும், கட்டை வண்டிகளும் அதிகமாகப் பயன்பட்டன. ஆனால், தற்போது புதியன கண்டுபிடிப்பு, அறிவு வளர்ச்சி ஆகியவற்றால் இருப்புப் பாதைகள், பெரிய விசாலமான சாலைகள் அமைக்கப்பட்டுப் போக்குவரத்து வியக்கத்தக்க அளவில் முன்னேற்றமடைந்துள்ளது. எனவே, சிறிய கிராமங்களில் வசிக்கும் மக்களும் ரயில், உந்து வண்டிகள் முதலிய சாதனங்களைப் பெரிதும் பயன்படுத்தக் கூடிய நிலைமைகள் ஏற்பட்டுள்ளன. அவ்விதமே மக்கள் பட்டாடைகளின்மேல் வைத்திருந்த விருப்பம் தற்போது ரேயான் (Rayon), டெரிலின் (Terelyne) முதலிய செயற்கைப் பட்டாடைகளின் பக்கம் திரும்பியுள்ளது.

மேலும் ஒரு நாட்டில் உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் மொத்த அளவு அதிகரித்துக் கொண்டிருந்த போதிலும், உற்பத்திப் பெருக்கத்தின் விகிதம் அவ்விதம் செல்லாமல், ஏறத்தாழ மிகவும் மெதுவாக அதிகரித்துக் கொண்டு வந்து இறுதியில் ஒரு நிலையான ஏற்றத்தைப் பெற்றிருக்கும். ராய்மாண்டு, பி. பிரிஸ்காட்டு (Raymond. B. Prescott) என்பவர் இவ் விகிதங்களில் ஏற்படும் ஏற்றம், காலப்போக்கில் குறைவுபடுமென்றும், நடைமுறையில் எவ்விதப் பொருளாதாரத் துறைகளிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மேல் விரிவடைதல் இயலாதென்றும் கூறியுள்ளார். தொழில் துறைகளில் ஏற்படும் இவ்வித 'வளர்ச்சியின் விகிதப் போக்கு' பின்வரும் நிலைகளைத் தழுவியுள்ளது என்றும் கூறுகிறார். (1) ஆராய்ச்சி நடத்தும் காலங்களில் வளர்ச்சியின் மொத்த அளவு குறைவுபட்டிருக்கும். (2) சமூக அமைப்புகளால் வளர்ச்சியின் அளவு அதிகரிக்கப்படும். (3) மக்களின் தேவை, விருப்பம் முதலியவை பூரிதமாகும் சமயம், வளர்ச்சியின் அளவு குறைவுபடும். (4) காலப் போக்கில் இறுதியாக வளர்ச்சியின் விகிதம் ஏற்றத்தாழ்வுகளில்லாமல் ஒரே நிலையான போக்கைப் பெறும். எனவே, ஒரு துறையில்

ஏற்படும் வளர்ச்சி மொத்தத்தில் அதிகரித்து வருவது வளர்ச்சியின் விகிதம் அளவில் குறைந்துகொண்டு வருவதன் போக்காலும் (a trend with a decreasing rate of increase) அல்லது குறைந்த விகிதத்தில் அதிகரித்துக் கொண்டு வருவதன் போக்காலும் (a trend which is increasing at a decreasing rate) ஏற்படலாம்.

குறுகிய அல்லது நீண்டகாலங்களில் விலைவாசிகளில் ஏற்படும் ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் பொதுப்படையான போக்கின் வாயிலாக வெளிப்படுத்த முடியும்.

சுழற்சியாக வரும் நிகழ்ச்சிகளின் போக்கு

வர்த்தகத் துறைகளில் பெரும்பாலும் ஓரளவுக்கு ஒரு சில ஆண்டுகள் விட்டுவிட்டு நிகழ்ச்சிகளில் ஏற்றத்தாழ்வுகள் ஏற்படுவதையே நாம் வர்த்தகத் துறையின் சுழற்சி (trade cycles) எனக் கூறுகிறோம். காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புகளைக் கவனிக்கும்போது இவ்வித ஏற்றத்தாழ்வுகள் மூன்று, நான்கு அல்லது ஐந்து ஆண்டுகள் விட்டுவிட்டு நிகழ்வதைக் காணலாம். இவைகள் பருவகாலத்தில் ஏற்படும் ஏற்றத்தாழ்வுகளைப்போல் அவ்வளவு ஒழுங்காக நிகழாமலும், தற்செயலாக இயங்கி ஏற்பட்டுள்ளன என்று கொள்ள முடியாத வகையிலும் இருக்கும். சுவர் கடிகாரத்திலுள்ள உலோகக் குண்டு (pendulum) புவிஈர்ப்புத்தான விசையினல் எவ்வாறு ஸ்திர நிலைப் புள்ளிக்கு இழுக்கப்பட்டு, ஆனல் அதே நேரத்தில் ஸ்திரநிலையிலில்லாமல் ஸ்திரப் புள்ளியின் இருபுறங்களிலும் ஊசலாடுகிறதோ, அவ்வாறே விற்பனைக்காகக் கொண்டுவரப்படும் சரக்குகளின் மொத்த அளவாலும், அவைகளில் மக்களுக்குள்ள தேவைகளாலும், வர்த்தகத் துறைகளில் நிகழ்ச்சிகள் ஸ்திரநிலைக்கு இழுக்கப்பட்டு, ஸ்திரநிலையிலேயே இருக்காமல், அதற்கு இரு புறங்களிலும் ஏற்றத்தாழ்வுகளுடன் நிகழ்கின்றன. இவ்விதமான சுழல்கள் வசிப்பதற்காகக் கட்டப்படும் கட்டட வேலைத் தொழில்களிலும், கால்நடை அபிவிருத்திகளிலும், பல்வகைப் பஞ்சாலை, நெசவாலைத் தொழில்களில் ஆடைகள் உற்பத்தி செய்வதிலும் நிகழ்வதைக் காணலாம்.

பருவகாலத்திற்குரிய போக்கு

காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மாற்றங்கள் ஒழுங்காக ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளிக்கு அடுத்தடுத்து வருவனவற்றை பருவ காலத்திற்கான போக்கு எனலாம். இங்குக் கால இடைவெளி பெரும்பாலும் ஓராண்டுக்குக் குறைவான காலப்பகுதியைப் பெற்றுள்ளது. ஒரு பெரிய நகரத்தில் ஒவ்வொருநாளும் போக்குவரவு சாதனங்களால்

ஏற்படும் விபத்துகளைக் குறிப்பிட்ட நேரங்களில் கண்டு ஆராய்ந்தால், விபத்துகளின் எண்ணிக்கை ஓரிரண்டு குறிப்பிட்ட நேரங்களில் அதிகரித்துள்ளதையும், மற்ற நேரங்களில் குறைவுபட்டுள்ளதையும் அறியமுடியும். ஒரு பல்கலைக்கழக நூல் நிலையத்தில் படிப்பதற்காக ஒவ்வொரு வாரத்திலும் எடுத்த புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகளிலும் ஒழுங்கான ஏற்றத்தாழ்வுகள் ஏற்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். ஓரிடத்தில் நிகழும் வெப்பநிலை, மழைநிலை, ஈரத்தன்மை, காற்றமுக்கம் முதலியவற்றில் பருவகாலத்திற்குரிய மாறுபாடுகளைக் காணலாம். பருவகாலத்தின் போக்கு ஒருசில ஆண்டுகள் கடந்தபின் படிப்படியாகவோ அல்லது திடீரென்றோ மாறவும் கூடும்.

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளின் போக்கு

காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மாறுபாடுகளைத் தனித்தனியாகப் பிரித்து ஆராய்ந்து, இறுதியாக வருவது எவ்வகையில் ஏற்பட்டுள்ளதெனத் திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியாது. இறுதியாக வரும் மாறுபாடுகள் தற்செயலாக நிகழ்ந்தவைகளெனக்கொள்வது வழக்கம். இவைகள் குறிப்பிடத்தக்க அளவிலில்லாமலும், தனித்தனியாகக் கருதுவதற்கு இயலாமலும் உள்ளவை. இவைகளின் போக்கில் ஒருவித ஒழுங்கையும் காணமுடியாது. திடீரென்று ஏற்படக்கூடிய பூகம்பம், வேலை நிறுத்தம், போர், வெள்ளம் முதலிய நிகழ்ச்சிகளால் ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளின் போக்கு எளிதில் பாதிக்கப்படக் கூடியவை.

எனவே. காலத் தொடர் வரிசையில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை, பொதுவான போக்கு, ஒரு சில ஆண்டுகளுக்கு அடுத்தடுத்து வரும் போக்கு, பருவகாலத்திற்குரிய போக்கு, முறையற்ற போக்கு எனப் பாகுபடுத்தி ஆராயும் முறையே ‘காலத் தொடர் வரிசையின் பாகுபாட்டுமுறை’ (Analysis of Time Series) எனப்படும். காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் இந்நான்கின் சேர்க்கையால் ஏற்பட்டுள்ளன எனவும் கொள்ளலாம். ஆதலால், காலத் தொடர் வரிசையிலடங்கிய செய்திகள் = பொதுவான போக்கு × சுழற்சியின் போக்கு × பருவத்திற்குரிய போக்கு × ஒழுங்கற்ற போக்கு ஆகும்

$$(\text{Original data} = \text{Trend} \times \text{Cycle} \times \text{Seasonal} \times \text{Irregular} = T \times C \times S \times L)$$

காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் பொதுவான போக்கை அளவிடுதல்

காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் பொதுவான போக்கை விளக்க அதிலடங்கிய செய்திகளுக்கேற்ப ஒரு நேர்கோடு அல்லது வளை கோட்டைப் பொருத்துவது வழக்கம். கொடுக்கப்பட்ட செய்திகளின்

போக்கை அறிவிக்கும் கோட்டிலிருந்து, செய்திகளுக்குரிய மதிப்புகள் எவ்வாறுன விலக்கங்களைப் பெற்றுள்ளன என்றறிவதுமட்டும் நமது விருப்பமல்ல. விலக்கங்கள் சுழல், பருவம் அல்லது ஒழுங்கற்ற போக்குகளால் ஏற்பட்டுள்ளன என்பதையும் அறிதல் அவசியம். காலத் தொடர் வரிசைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதிலும், முன்கூட்டியே எதிர்காலத்தில் காலத்தொடர் வரிசையில் ஏற்படும் போக்கை அறிவதிலும் கவனம் செலுத்தப்படல் வேண்டும்.

பொதுவாகக் காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மதிப்புகளின் வாயிலாகவே, எவ்வித முறையைப் பின்பற்றி ஆராயவேண்டுமென்பதை ஒருவாருக வரையறுக்க முடியும். ஒரு சில ஆண்டுகளுக்கு அடுத்தடுத்து சுழற்சியாக வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்குள்ள மாற்றங்களைத் தனிப்படுத்தி விலக்கவேண்டுமாகில், போக்குக் கோட்டை நிகழ்ச்சிகளது மதிப்புகளுக்கிடையில் செல்லுமாறு வரையறுத்தல் வேண்டும். அப்போது காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மதிப்புகளுக்கும், போக்குக் கோட்டின் அமைப்பின் வாயிலாகக் கணக்கிடப்படும் மதிப்பிற்கும் உள்ள ஏற்றத்தாழ்வுகள் ஏறக்குறைய சமன்படுத்தப் படுகின்றன. புள்ளியியலாளர் செய்திகளின் போக்கைப் புறவியலாக ஊகித்தறிந்து, அப்போக்குக்குகந்த போக்குக் கோட்டைக் கணக்கியல் முறைப்படி வரையறுத்துக் கூறுகிருர். எனவே, செய்திகளின் போக்கைத் தீர்மானிப்பதில் பின்வரும் முறைகள் பயன்படுத்தபடுகின்றன: (1) காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கை வரைபடமூலம் விளக்குதல். (2) நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தி அறிவித்தல். (3) குறைந்த வர்க்க முறையைக் கொண்டு ஒரு நேர்கோடு அல்லது ஒரு வளை கோட்டைப் பொருத்தி அறிவித்தல். இவைகளை ஒவ்வொன்ருக விளக்கிடுவோம்.

காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கை வரைபட மூலம் வரையறுத்தல் (Graphical Method)

காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் செய்திகளின் போக்கை அறிவதற்காக வரைபடத்தாளில் கிடை அச்சில் (x-axis) காலத்தையும், நிலை அச்சில் (y-axis) மாறி ஏற்கும் மதிப்பையும் தகுந்த அலகுகோல்களைக் கொண்டு குறிப்பிடவேண்டும். பிறகு ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட காலங்களைக் கிடை அச்சுத்தூரங்களாகவும் ($\bar{x}$-coordinates), அக்காலங்களில் மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை, நிலை அச்சுத்தூரங்களாகவும் (y-coordinates) கொண்ட புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்திடவும். அடுத்தடுத்து வரும் புள்ளிகளை முறையே நேர்கோட்டினுல் சேர்த்து உண்டாகும் வரைபடமே காலத் தொடர் வரிசையில் உள்ள செய்திகளை அறிவிக்கிறது. கருவிகளின் உதவியின்றி, கையினுலே ஒரு கோட்டை அல்லது ஒரு வளைகோட்டை, புள்ளிகளின் அமைப்புக்

கேற்றவாறு வரைந்திடவும். இதுவே காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கை ஒருவாறு வெளிப்படுத்துகிறது.

நகரும் சராசரியின் மூலம் விளக்குதல் (Moving Average Method)

காலத் தொடர் வரிசையில் முறையே 1ஆவது, 2ஆவது, 3ஆவதாக வரும் எண்கள்; 2ஆவது, 3ஆவது, 4ஆவதாக வரும் எண்கள்; 3ஆவது, 4ஆவது, 5ஆவது எனவரும் எண்களைக் கூட்டி, அவைகள் ஒவ்வொன்றையும் 3ஆல் வகுத்து வரும் எண்களே மூன்று ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளாகும் (3 year moving average). இங்குச் சராசரிகள் தொடர்ச்சியாகக் கணக்கிடப் படுவதால் இவைகளை நகரும் சராசரிகள் எனக் கூறுகிறோம். தொடர் வரிசையில் அடுத்தடுத்து வரும் 3 எண்களின் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, அவைகளைத் தொடர் வரிசைக்கு எதிராக 2ஆவது, 3ஆவது, 4 வது... ஆகிய இடங்களில் அமைத்திடுவது வழக்கம். ஐந்து ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடும்போது அவைகளை முறையே தொடர் வரிசைக்கு எதிரில் 3ஆவது, 4ஆவது,...ஆகிய இடங்களில் குறிக்கவேண்டும். எனவே ஒற்றைப்படை எண்களை எடுத்துச் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை, சராசரிகளைக் கணக்கிட எடுத்த எண்களின் நடுமையத்திலமையும் எண்களுக்கெதிரில் அமைத்திடல் வேண்டும். ஆனால் இரு ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடும்போது, முதலில் அவைகளை முறையே காலத் தொடர் வரிசைக்கு எதிரில் 1ஆவது, 2ஆவது; 2ஆவது, 3ஆவது; 3ஆவது, 4ஆவது...ஆகிய இடங்களின் நடுமையத்தில் அமைத்திடல் வேண்டும். பிறகு இச் சராசரிகளை மறுமுறை இரண்டு ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளாகக் கணக்கிட்டு, அவைகளை முறையே காலத்தொடர் வரிசையின் 2ஆவது, 3ஆவது, 4ஆவது, ... ஆகிய இடங்களுக்கெதிரில் குறிப்பிடல் வேண்டும். (இறுதியாக வரும் நகரும் சராசரிகள் முறையே 1ஆவது 2ஆவது, 2ஆவது, 3ஆவது; 2ஆவது, 3ஆவது, 3ஆவது; 4ஆவது; 3ஆவது, 4ஆவது, 4ஆவது, 5ஆவது,...ஆகிய இடங்களில் வரும் எண்களின் சராசரிகளாகும் என்பதை அறிந்திடவும்). எனவே, இரட்டைப் படை எண்களைத் தொடர் வரிசையிலிருந்து எடுக்கும் போது, இருமுறை நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடவேண்டி வருகிறது.

நகரும் சராசரிகளின் தனிப்பட்ட இயல்புகள் (Characteristics of moving averages)

(1) நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட எடுக்கும் காலப்பகுதி, காலத் தொடர் வரிசையில் அடுத்தடுத்து வரும் இரு பெரும மதிப்புகள் அல்லது இரு சிறும மதிப்புகளுக்குரிய கால அளவு அல்லது அதன் மடங்காகவிருத்தல் வேண்டும் (The period of the moving average

should either be the same as that between two successive maximum or two successive minimum values or an integral multiple of this period). அப்போது நகரும் சராசரிகள் அந்தந்தக் காலப்பகுதிகளில் வரும் மதிப்புக்களின் ஏற்றத்தாழ்வுகளைச் சமன்படுத்துகின்றன. பொதுவாக, காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள ஒழுங்கற்ற, பருவகாலத்திற்குரிய அல்லது சுழற்சிக்கான போக்குகளை விலக்கிட, முறையே 3 அல்லது 5 மாதங்கள்; 12 மாதங்கள்; ஒரு சில ஆண்டுகளைக் காலப் பகுதிகளாகக்கொண்ட நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(2) காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புகளில் ஒருமிக்க ஏற்றத்தாழ்வுகளில்லாமலும், மதிப்புகளெல்லாம் ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டினுல் வரையறுக்கப்பட்டிருக்குமாலுைம் நகரும் சராசரியைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில், நகரும் சராசரிகளாக வரையறுக்கப்படும் எண்கள் எல்லாம் காலத் தொடர் வரிசையில்வரும் பழைய எண்களாகவே இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, $y=3x+2$ என்ற சமன்பாட்டில் x-க்கு முறையே 0, 1, 2, 3, 4, 5,...என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்து, y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, பின்வருமாறு முதல் வரிசையிலமைத்திடவும். பிறகு அவைகளில் அடுத்தடுத்துவரும் மூன்று எண்களுக்குரிய நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, இரண்டாவது வரிசையிலமைத்திடவும்.

y	3 எண்களுக்குரிய நகரும் சராரிகள்
2	
5	5
8	8
11	11
14	14
17	
20	

இங்கு இரண்டாவது வரிசையில் வரும் எண்களெல்லாம் முதல் வரிசையிலுள்ள பழைய எண்களே யாகும்.

ஐந்து எண்களை அவ்வப்போது எடுத்துக் கணக்கிடும்போதும், காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் முதலிரண்டு எண்களைத் தவிர (அதாவது 2, 5 எண்களைத் தவிர) மற்ற எண்களே நகரும் சராசரிகளாகும். எனவே, இச்சமயங்களில் நகரும் சராசரிகளால் யாதொரு பயனுமில்லை.

3. ஒரு வளைகோட்டை வரையறுத்துச் செய்திகளின் போக்கை அறிவிக்கும்போதும், நகரும் சராசரிகளின் மதிப்புகள் ஒரு அளவில் அதிகரித்துக் கொண்டும் அல்லது குறைந்து கொண்டும் வரலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $y = (x—7)^2$ என்ற சமன்பாட்டில் x-க்கு முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...என மதிப்புகளையிட்டு, y-ன் மதிப்புகளை இரண்டாவது வரிசையிலும், 3, 4, 5 எண்களுக்குரிய நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை முறையே 3ஆவது, 4ஆவது, 5ஆவது வரிசைகளில் அமைத்திடவும்.

x	y	3 எண்களுக் குரிய நகரும் சராசரி	4 எண்களுக் குரிய நகரும் சராசரி	5 எண்களுக் குரிய நகரும் சராசரி
1	36			
2	25	25·7	21·5	18
3	16	16·7	13·5	11
4	9	9·7	7·5	6
5	4	4·7	3·5	3
6	1	1·7	1·5	2
7	0	0·7	1·5	3
8	1	1·7	3·5	
9	4	4·7		
10	9			

இங்கு 3, 5 எண்களுக்குரிய நகரும் சராசரிகள் காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மதிப்புகளைக் காட்டிலும் ஒரே அளவில் (0·7 அல்லது 2·0) அதிகரித்திருப்பதையும், 4 எண்களுக்குரிய நகரும் சராசரிகள் காலத் தொடர் வரிசையில் வரும் மதிப்புகளைக் காட்டிலும் குறைவுபட்டிருப்பதையும் கவனிக்கவும். தவிரவும் நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட எடுக்கும் எண்ணிக்கைகள் அதிகரிக்க, அதிகரிக்கக் காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புகளுக்கும், நகரும் சராசரிகளுக்குமுள்ள வேறுபாடுகள் அதிகரிக்கின்றன. ஆதலால்,குழிவான(concave)அமைப்பையுடைய வளைகோட்டைப் பொருத்தும்போது, நகரும் சராசரிகள் காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கை அளவுக்குமேல் மதிப்பிடுகின்றன. அதேபோல் குவிவான (convex) அமைப்பைப் பெற்ற வளைகோட்டைப் பொருத்தும்போது நகரும் சராசரிகள், கால தொடர் வரிசையின் போக்கைக் குறைத்து மதிப்பிடுகின்றன. மேலும் குழிவு, குவிவுப் பகுதிகள் இரண்டையும் பெற்றுள்ள வளைகோட்டைப் பொருத்தும்போது நகரும் சராசரிகள் குழிவுப் பகுதியில் போக்கை உயர்த்தவும், குவிவுப் பகுதியில் போக்கைக் குறைக்கவும் செய்கின்றன.

4. வாய்ப்பு, இன்னும் நமக்குத் தெரியாத மற்றக் காரணங்களால், காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புகள் பாதிக்கப்பட்டிருக்குமானல், நகரும் சராசரிகளைக் கொண்டு ஏற்றத்தாழ்வுகளைப் பொதுவாக நீக்க முடியாது.

5. காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புகளின் ஏற்றத் தாழ்வுகளுக்கேற்ற காலப்பகுதி அல்லது அதன் மடங்கையே பயன் படுத்தி, நகரும் சராசரிக் கணக்கீட்டில் எடுக்கப்படும் எண்ணிக் கையை வரையறுக்க வேண்டும். இச் சமயங்களிலும்கூட, சுழற்சி யாக வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்குள்ள ஏற்றத்தாழ்வுகள் முன்போலவே காணப்படலாம்.

6. நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுவதில் எடுக்கும் எண்ணிக்கை கள் இரட்டைப் படையாக இருக்குமானால், நகரும் சராசரிகளை இரு முறை கணக்கிட்டு மையப்படுத்த வேண்டும். சராசரியைக் கணக்கிடு வதில் எடுக்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க அவ்வப்போது நீக்கப்பட்ட அல்லது சேர்த்துக்கொள்ளப்பட்ட உறுப் பின் முக்கியத்துவம் குறைவுபடுத்தப்பட்டு, உறுப்பு மதிப்புகளுக் குள்ள வேற்றுமை விலக்கப்படுகின்றன. அப்போது சராசரிக்குரிய காலப்பகுதியைக் காட்டிலும் குறைவுபட்ட காலப்பகுதியில் வரும் உறுப்பு மதிப்புகளுக்குள்ள ஏற்றத்தாழ்வுகள் பொதுத்தன்மையடை வதுமட்டுமேயன்றி, பொருத்தப்படும் வளைகோட்டின் வளையும் தன்மையும் (cuvrature) குறைவுபடுத்தப்படுகிறது.

7. n ஆண்டுகளைக் கொண்ட காலப் பகுதியை மேற்கொண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடும்போது, 'n' ஒற்றைப்படையாகில் $\frac{n-1}{2}$ உறுப்பு மதிப்புகள் காலத்தொடர் வரிசையின் துவக்கத்திலும் இறுதியிலும் நீக்கப்படுகின்றன. n இரட்டைப்படையாகில் $\frac{n}{2}$ உறுப்பு மதிப்புகள் தொடர் வரிசையின் மேலும், கீழும் தவிர்க்கப்படுகின்றன.

8. நகரும் சராசரிகள் பரந்த விளக்கத்தைத் தெரிவிக்குமே யன்றி, சுருக்கமான விளக்கத்தை அறிவிப்பதில்லை. இவைகள் காலத் தொடர் வரிசையிலுள்ள ஏற்றத்தாழ்வுகள் எம்முறையில் ஏற்பட் டுள்ளன என்பதையும், எந்நியதிக்குக்கட்டுப்பட்டு நிகழ்கின்றன என் பதையும் விவரிப்பதில்லை. இருந்தபோதிலும் காலத்தொடர் வரிசை யின் போக்கைக் கணக்கியல் சமன்பாட்டினால் எளிதாக விவரிக்க முடி யாத சமயங்களில், நகரும் சராசரிகளைக் கொண்டுதான் விளக்கம் கொடுக்கவேண்டி வருகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு

பின்வரும் செய்திகளுக்கு 3, 2 ஆண்டுகளைக் காலப்பகுதியாகக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுக. இவைகளில் எவ்வித நகரும் சராசரி செய்திகளுக்கு ஏற்றதாக உள்ளது என்

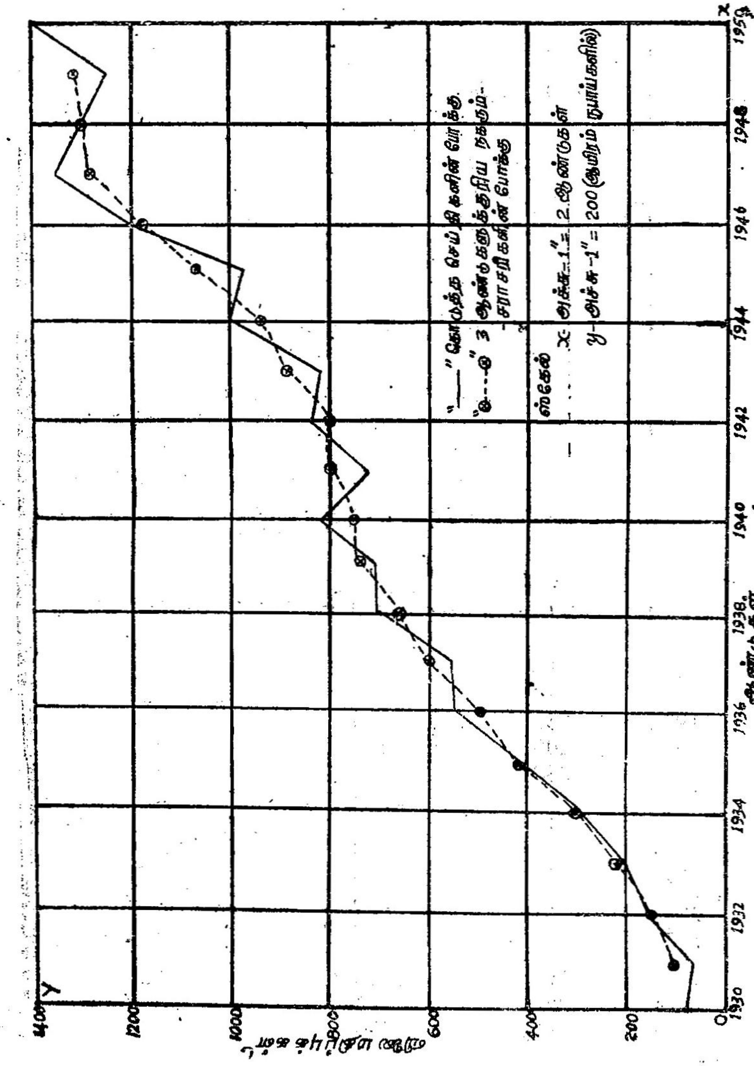
பதையும் ஆராய்ந்திடுக. இவைகளை வரைபட மூலமாகவும் விளக்கிடுக.

(1930—1950) ஆண்டுகளில் ஒரு கடையில் விற்பனையான துணிகளின் விலை மதிப்புகள் (ஆயிரம் ரூபாயில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	விலை மதிப்பு	ஆண்டு	விலை மதிப்பு
1930	80	1941	730
1931	75	1942	840
1932	160	1943	820
1933	200	1944	1000
1934	280	1945	980
1935	400	1946	1200
1936	540	1947	1350
1937	550	1948	1300
1938	700	1949	1250
1939	700	1950	1400
1940	810		

மூன்று ஆண்டுகளைக் காலப் பகுதியாகக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடும் முறை

ஆண்டு	விலை மதிப்பு	3 ஆண்டுகளில் வரும் விலைமதிப்புகளின் கூடுதல்	3 ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரி
1930	80	...	...
1931	75	315	105
1932	160	435	145
1933	200	640	213
1934	280	880	293
1935	400	1220	407
1936	540	1490	497
1937	550	1790	597
1938	700	1950	650
1939	700	2210	737
1940	810	2240	747
1941	730	2180	793
1942	840	2390	797
1943	820	2660	887
1944	1000	2800	933
1945	980	3180	1060
1946	1200	3530	1187
1947	1350	3850	1283
1948	1300	3900	1300
1949	1250	3950	1367
1950	1400	...	...

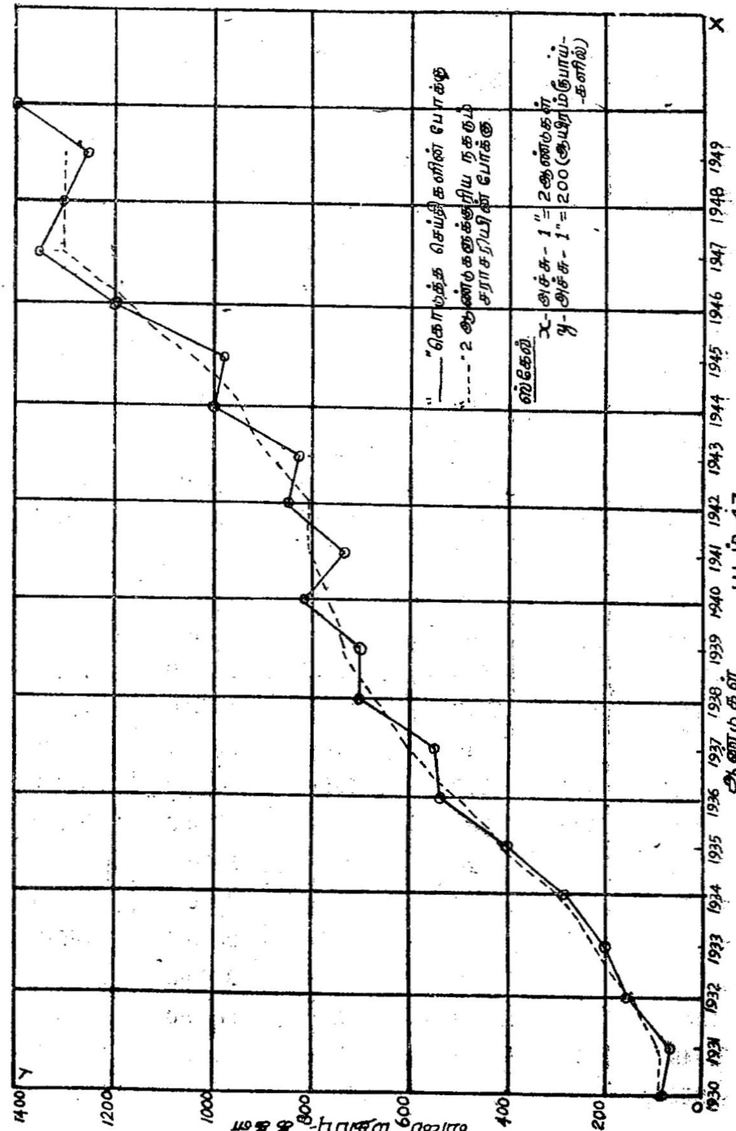


படம்-46

வரைபடத்தாளில் கொடுக்கப்பட்ட செய்திகளின் போக்கும், நகரும் சராசரிகளுக்குரிய போக்கும் வரையப்பட்டுள்ளன (படம்-46).

இரண்டாண்டுகளைக் காலப்பகுதியாகக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடும் முறை

ஆண்டு	விலை மதிப்பு	இரண்டாண்டுக் கூட்டல்	இரண்டாண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரி	இரு நகரும் சராசரிகளின் கூட்டல்	மையப்படுத்தப்பட்ட நகரும் சராசரி
1930	80	...	...	...	...
1931	75	155	77·5	195·0	97·5
1932	160	235	117·5	297·5	148·8
1933	200	360	180·0	420·0	210·0
1934	280	480	240·0	580·0	290·0
1935	400	680	340·0	810·0	405·0
1936	540	940	470·0	1015·0	507·5
1937	550	1090	545·0	1170·0	585·0
1938	700	1250	625·0	1325·0	662·5
1939	700	1400	700·0	1455·0	727·5
1940	810	1510	755·0	1525·0	762·5
1941	730	1540	770·0	1555·0	777·5
1942	840	1570	785·0	1615·0	807·5
1943	820	1660	830·0	1740·0	870·0
1944	1000	1820	910·0	1900·0	950·0
1945	980	1980	990·0	2080·0	1040·0
1946	1200	2180	1090·0	2365·0	1182·5
1947	1350	2550	1275·0	2600·0	1300·0
1948	1300	2650	1325·0	2600·0	1300·0
1949	1250	2550	1275·0	2600·0	1300·0
1950	1400	2650	1325·0	...	...



படம்-47

வரைபடத் தாளில் கொடுக்கப்பட்ட செய்திகளின் போக்கும், 2ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளின் போக்கும் வரையப்பட்

டுள்ளன (படம் 47). (செய்திகள் (1930, 1931); (1932, 1933); (1934, 1935) ஆகிய ஆண்டுகளில் பொதுவாக உயர்ந்து வருவதால்) இங்கு இரண்டு ஆண்டுகளைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளே சிறந்தவை.

குறைந்த வர்க்க முறையைக் கொண்டு நேர்கோட்டுச் சம்பந்தமான போக்கை வரையறுத்தல்

(x_r, y_r), $r = 1, 2, \ldots\ldots n$ என்பன x, y மாறிகளின் n சோடி மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். வரைபடத் தாளில் x_r - களைக் கிடை அச்சுத் தூரங்களாகவும், y_r - களை நிலை அச்சுத் தூரங்களாகவும் கொண்ட n புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இப் புள்ளிகளது போக்கை ஆராய்ந்து அவைகள் ஒரு நேர்கோட்டின் போக்குக்கு ஏறத்தாழ ஒத்து வருமானால், அந்த நேர்கோடு,

$y = a+bx$ என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்ளவும்.

x, y மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு அவைகளை முறையே $\bar{x}$, $\bar{y}$ - எனக் கொள்ளவும். $(\bar{x}, \bar{y})$ சோடி மதிப்பை G என்னும் புள்ளியால் (வரைபடத் தாளில்) குறிக்கவும். G புள்ளியின் வழியாக எவ்வித நேர்கோட்டை (நிலைக்கோட்டைத் தவிர) வரைந்தாலும், அக் கோட்டிற்கும், வரைபடத் தாளிலுள்ள புள்ளிகளுக்குமுள்ள ஏற்றத் தாழ்வுகளின் கூடுதல் எப்பொழுதும் 0-ஆகும். ஆனால், நமக்குத் தேவையான நேர்கோடு, செய்திகளின் போக்கை அறிவிக்கத்தக்கதாக அமைந்திருக்க வேண்டும். எனவே, கணக்கியலாக வரையறுக்கப்படும் நேர்கோடு G $(\bar{x}, \bar{y})$ - புள்ளியின் வழியாகச் செல்லுவது மட்டுமன்றி, வரைபடத்திலுள்ள புள்ளிகளின் போக்கைத் தெரிவிக்கக் கூடியதாகவும் இருக்கவேண்டும். இதற்காக போக்கைச் சிறந்த முறையில் அறிவிக்கும் நேர்கோட்டை வரையறுக்க, குறைந்த வர்க்க முறையைக் (Principle of Least Squares) கடைப்பிடிக்க வேண்டி இருக்கிறது. அதாவது செய்திகளுக்குகந்த நேர்கோட்டிற்கும், வரைபடத் தாளிலுள்ள புள்ளிகளுக்குமுள்ள நிலை அச்சுத் தூரங்களில் வரும் வேற்றுமையின் இரு படி வர்க்கங்களைக்கண்டு, அவற்றின் கூடுதல் மிகக் குறைவான மதிப்பைப் பெற்றுள்ளதாகச் செய்யும் முறையாகும். இம் முறையின் வாயிலாக நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டில், வரும் a, b-களின் மிக மேலான மதிப்புகளைக் கணக்கிட முடியும்.

கணக்கியலில் a, b-ன் மதிப்புகளை வரையறுக்கும் ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள் (normal equations) :

$$\Sigma \left\{ y_r - a - bx_r \right\} = 0$$

$$\Sigma \left\{ y_r - a - bx_r \right\} x_r = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $\Sigma y_r - n \cdot a - b \Sigma x_r = 0$ (1)

$$\Sigma x_r y_r - a \Sigma x_r - b \Sigma x_r^2 = 0 \qquad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளில் a, b - களைத் தவிர, மற்ற மதிப்புகளைப் பின்வரும் பட்டியலை யமைத்துக் கண்டுகொள்ளமுடியும்.

x	y	$x \cdot y$	x^2
x_1	y_1	$x_1\ y_1$	x_1^2
x_2	y_2	$x_2\ y_2$	x_2^2
...	...	...	...
...	...	...	...
x_r	y_r	$x_r\ y_r$	x_r^2
...	...	...	...
...	...	...	...
x_n	y_n	$x_n\ y_n$	x_n^2
Σx_r	Σy_r	$\Sigma x_r y_r$	Σx_r^2

இங்கு முதலிரண்டு நிலை வரிசைகளில் வரும் மதிப்புகள், கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மற்ற நிலை வரிசைகளுக்கு ஏற்ற மதிப்புகளைக் கணக்கிடல் வேண்டும். எனவே Σx_r, Σy_r, $\Sigma x_r y_r$, Σx_r^2 ஆகியவை நமக்குத் தெரிந்த மதிப்புகளாகும்.

ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளில் இம் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி, விடுவிக்க, a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

எனவே, $y = a + bx$ என்ற நேர்கோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள செய்திகளின் போக்கை அறிவிக்கும் நேர்கோடாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு

(1930—1950) ஆண்டுகளில் விற்பனையான துணிகளின் விலை மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டை வரையறுக்கவும்.

ஆண்டு	விலைமதிப்பு			XY		X^2
	—	X	Y	−	+	
1930	0	−10	80	800		100
1931	1	− 9	75	675		81
1932	2	− 8	160	1280		64
1933	3	− 7	200	1400		49
1934	4	− 6	280	1680		36
1935	5	− 5	400	2000		25
1936	6	− 4	540	2160		16
1937	7	− 3	550	1650		
1938	8	− 2	700	1400		4
1939	9	− 1	700	700		1
1940	10	0	810		0	0
1941	11	1	730		730	1
1942	12	2	840		1680	4
1943	13	3	820		2460	9
1944	14	4	1000		4000	16
1945	15	5	980		4900	25
1946	16	6	1200		7200	36
1947	17	7	1350		9450	49
1948	18	8	1300		10400	64
1949	19	9	1250		11250	81
1950	20	10	1400		14000	100
மொத்தம்		0	15365	52325		770

இங்கு 1940ஆம் ஆண்டை மையமாகக் கொண்டு ஒரு நேர் கோட்டை வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே இங்கு $X = x - 1940$.

$Y = A + BX$ என்பது நேர்கோட்டை வரையறுக்குமானால், ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள்

$\Sigma Y_r - nA - B\Sigma X_r = 0$ (1)

$\Sigma X_r Y_r - A\Sigma X_r - B\Sigma X_r^2 = 0$ (2) முறையே

$15365 - 21A = 0$ i.e., $A = \frac{15365}{21} = 731{\cdot}66$

என்றும்,

$52325 - 770B = 0$ i.e., $B = \frac{52325}{770} = 67{\cdot}95$

என்றும் ஆகும்.

எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $Y = 731{\cdot}66 + 67{\cdot}95\,X$ என்றாகிறது.

(x_r, y_r) என்பன x, y மாறிகளின் n சோடி மதிப்புகளைக் குறிக்கட்டும். x_r-களைக் கிடை அச்சுத் தூரங்களாகவும், y_r-ஐ நிலை அச்சுத் தூரங்களாகவும் கொண்ட n புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் தகுந்த அலகுகோல்களைப் பயன்படுத்திக் குறிக்கவும். இப் புள்ளிகளது போக்கைக் கண்டு, அவைகள் ஒரு வளைகோட்டின் போக்கைப் பெற்றிருக்குமென ஊகித்தால், அவ் வளைகோட்டை $y = a + bx + cx^2$ என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கவும். குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தி, a, b, c களின் மதிப்புகளைப் பின்வரும் ஒழுங்குச் சமன்பாடுகளின் வாயிலாக வரையறுக்கவும்.

$$\Sigma \left\{ y_r - a - bx_r - cx_r^2 \right\} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma \left\{ y_r - a - bx_r - cx_r^2 \right\} x_r = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma \left\{ y_r - a - bx_r - cx_r^2 \right\} x_r^2 = 0 \qquad (3)$$

அல்லது $\Sigma y_r - na - b\Sigma x_r - c\Sigma x_r^2 = 0$ I

$$\Sigma x_r y_r - a\Sigma x_r - b\Sigma x_r^2 - c\Sigma x_r^3 = 0 \qquad \text{II}$$

$$\Sigma x_r^2 y_r - a\Sigma x_r^2 - b\Sigma x_r^3 - c\Sigma x_r^4 = 0 \qquad \text{III}$$

இங்கு a, b, c-களைத் தவிர மற்றவைகளைக் கண்டுகொள்ள முடியும். அதற்காகக் கீழ்வரும் பட்டியலை அமைத்திடவும்.

x	y	xy	x^2	x^3	x^4	x^2y
x_1	y_1					
x_2	y_2					
...	...					
...	...					
...	...					
x_r	y_r	x_ry_r	x_r^2	x_r^3	x_r^4	$x_r^2y_r$
...	...					
...	...					
...	...					
x_n	y_n					
Σx_r	Σy_r	Σx_ry_r	Σx_r^2	Σx_r^3	Σx_r^4	$\Sigma x_r^2y_r$

பட்டியலில் முதலிரண்டு நிலைவரிசை மதிப்புகள்தான் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மற்ற நிலைவரிசைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடல் வேண்டும். அப்போது, Σx_r, Σy_r, Σx_r^2, Σx_r^3, Σx_r^4, Σx_ry_r, $\Sigma x_r^2y_r$ என்பவைகளைக் கண்டுகொள்ள முடியும்.

இவைகளின் மதிப்புகளை I, II, III சமன்பாடுகளில் பயன்படுத்தி, a, b, c-களின் மிகமேன்மையான மதிப்புகளைக் கணக்கிடல் வேண்டும்.

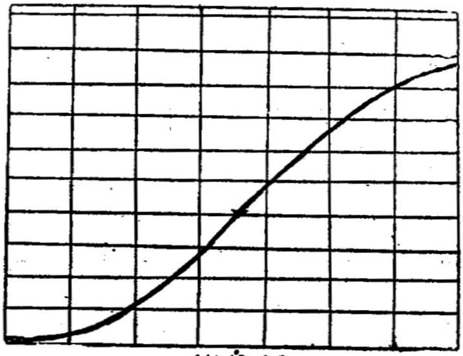
இவ்வாறே கொடுக்கப்பட்ட செய்திகளுக்கேற்ப $y = ax^n$; $y = ae^{bx}$ என்ற வளைகோடுகளையும் கணக்கியலாக வரையறுக்க முடியும்.

காம்பெர்ட்சின் வளைகோடு (Gompertz Curve)

இவ்வளைகோட்டை,

$y = ka^{b^x}$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. இதை

$\log y = \log k + (\log a)\, b^x$ என்றும் எழுதலாம். இதன் அமைப்பு கீழ்வரும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம்-48

உறுப்பு மதிப்புகளில் ஏற்படும் வளர்ச்சியின் விகிதம் குறைந்து கொண்டு வருமானால், காம்பெர்ட்சின் வளைகோட்டைப் பொருத்தலாம். இவ்வளைகோட்டின் அமைப்பு, துவக்கத்திலும் இறுதியிலும் வளர்ச்சியின் விகிதம் மிகக் குறைவாகவுள்ளதை அறிவிக்கும் தன்மை படைத்தது. இதனைப் பயன்படுத்தி ராய்மாண்டு டி. பிரிஸ்காட்டு (Raymond D. Prescott) என்பவர் தொழில்துறைகளில் ஏற்படும் வளர்ச்சியின் நியதியை வெளிப்படுத்தியுள்ளார்.

லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு (Logistic Curve)

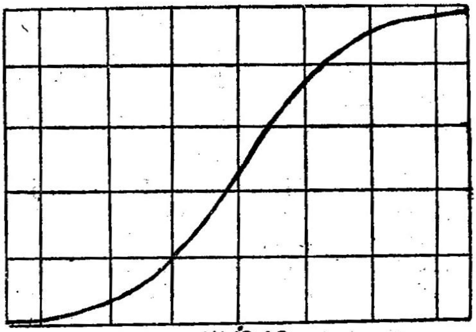
இதன் அமைப்பும் காம்பெர்ட்சின் வளைகோட்டின் அமைப்பையே ஏறக்குறையப் பெற்றுள்ளது.

இதை $y = \dfrac{k}{1+e^{a+bx}}$ என்ற சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. இதன் அமைப்பு பின்வருமாறு இருக்கும்.

இங்கு b-ன் மதிப்பு 0-க்குக் கீழ் வருமாதலால், x-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க இறுதியில் y-ன் மதிப்பு k ஆகும்.

இவ்வளைகோடு முதன் முதலாக பெல்ஜிய நாட்டுக் கணித மேதையான வெர்ஹல்ஸ்டு (Verhulst) என்பவரால் மக்கள் தொகையின் பெருக்கத்தை அறிவிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டது. இதனைக்

கொண்டு, ஒரு நிலப் பகுதியில் வாழும் மக்களின் எண்ணிக்கையை அவ்வப்போது மதிப்பீடு செய்ய முடியும். லாஜிஸ்டிக் வளைகோட்



படம்-49.

டால் விவரிக்கப்படும் வளர்ச்சியின் நியதியைப் பற்றி, 'பேர்ல்' (Raymond Pearl) என்பவர் பின் வருமாறு கூறியுள்ளார்.

'வரம்புள்ள நிலப்பகுதியில், சுழற்சியாக வரும் நிகழ்ச்சிகளை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஆராயும்போது, அவைகளில் ஏற்படும் வளர்ச்சியின் மொத்த அளவு இருநிலைகளைப் பொறுத்துள்ளது. அவைகளாவன : (*a*) ஆராய்ச்சியின் துவக்கத்தில் ஏற்கெனவேயே நிகழ்ச்சிகளில் வந்துள்ள முழுமையான அளவு. (*b*) வளர்ச்சிக்கு உதவியாக, இன்னும் பயன்படுத்தப்படாமல் அல்லது செலவழிக்கப் படாமல் என்றேனும் வெளிப்படக்கூடிய சேமப் பொருள்களின் அளவு.'

மக்கள் தொகையைப் பொறுத்தமட்டில், உயிர் வாழ்வதற்கு வேண்டிய பொருள்களைப் பெருக்குவதனால், ஒரு புதிய வளர்ச்சிக்கான நிலையை ஏற்படுத்த முடியும். மக்கள் இனம் வேட்டையாடும் நிலையிலிருந்து உழவுத் தொழில் செய்யும் நிலையையும், அதன் பிறகு ஆலைத்தொழில் செய்யக் கூடியதுமான முன்னேற்ற நிலைகளைப் படிப்படியாகக் கடந்து வந்துள்ளது. இம்முன்னேற்ற நிலைகளை 'லாஜிஸ்டிக்' வளைகோட்டால் அறிவிக்க முடியும். ஒவ்வொரு நாகரீக காலத்துக்கான 'லாஜிஸ்டிக்' வளைகோட்டுடன் பிணைத்து வரையறுக்கப்படுகிறது.

தற்காலத்தில் மக்கள்கணிப்பு, 10 ஆண்டுகளுக்கு ஒருமுறையாக எடுக்கப்படுவதும், அவ்வப்போது மக்கள் தொகை அதிகரித்து வருவதும் யாவரும் அறிந்ததே. இதனை அதற்குரிய 'லாஜிஸ்டிக்' வளைகோடுகள் மூலம் அறியலாம். மேலும், எதிர்காலத்தில்

மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சி வீதம் எவ்வித நிலையிலிருக்கும் என்பதை மதிப்பீடு செய்வதிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு

(1952 - 1955) ஆண்டுகளில் இங்கிலாந்து நாட்டில் நடந்த திருமணங்களின் எண்ணிக்கை கீழ்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 4 எண்களைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்ட செய்தியைப் பொதுவான போக்கு, பருவநிலைப் போக்கு, முறையற்ற போக்கு எனப் பிரித்திடவும்.

ஆண்டு	பருவம் I	II	III	IV
1952	121·3	79·8	118·3	80·4
1953	107·6	87·5	120·8	78·9
1954	110·4	85·0	120·2	77·3
1955	115·3	85·6	122·5	86·8

செயல் முறை: முதல் அட்டவணை.

ஆண்டு (1)	பருவம் (2)	செய்தி (3)	4 எண் களுக்குரிய கூட்டுதல் (4)	4 வரியில் வரும் இரு எண்களுக் குரிய கூட்டுதல் (5)	4 எண்களுக்குரிய நகரும் சராசரி—(5-வது வரிஎண் ÷ 8) (6)
1952	I	121·3	...	...	...
	II	79·8	399·8	...	...
	III	118·3	386·1	785·9	98·24
	IV	80·4	393·8	799·9	97·50
1953	I	107·6	396·3	790·1	98·76
	II	87·5	394·8	791·1	98·90
	III	120·8	397·6	792·4	99·05
	IV	78·9	395·1	792·7	99·09
1954	I	110·4	394·5	789·6	98·70
	II	85·0	392·9	787·4	98·42
	III	120·2	397·8	790·7	98·84
	IV	77·3	398·4	796·2	99·52
1955	I	115·3	400·7	799·1	99·89
	II	85·6	410·2	810·9	101·36
	III	122·5	...	...	...
	IV	86·8		...	...

ஆறுவது வரிசையில் வரும் மதிப்புகள் பொதுவான போக்கை அறிவிக்கின்றன.

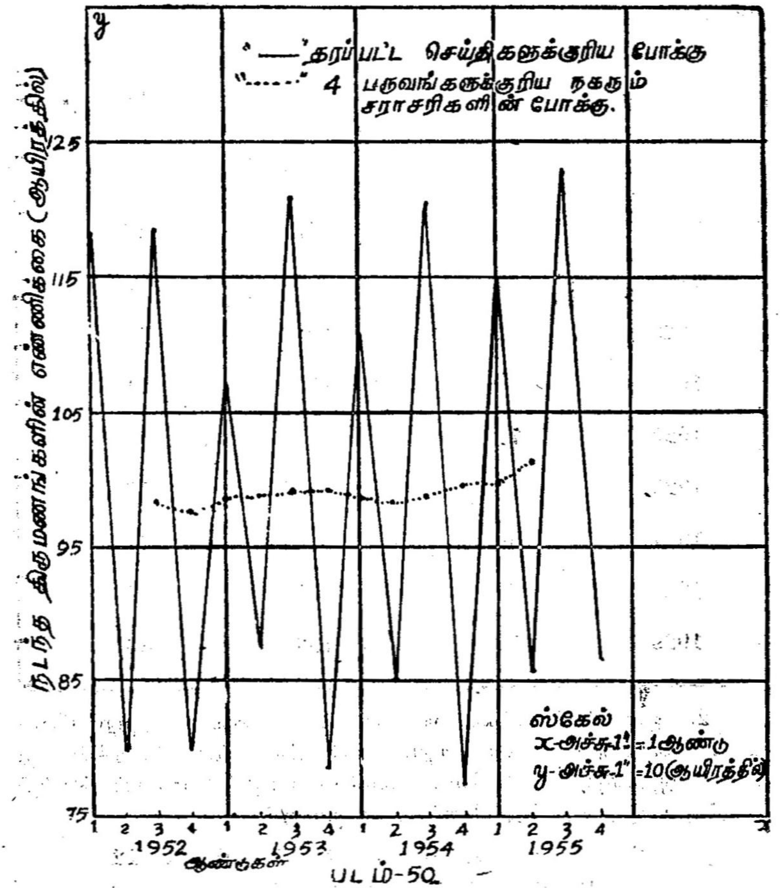
இரண்டாவது அட்டவணை

ஆண்டு	பருவம்	செய்தி	4 எண்களுக்குரிய நகரும் சராசரி	செய்திக்கும் நகரும் சராசரிக்குமுள்ள வேற்றுமை	பருவங்களுக்குரிய திருத்தம்	பருவத்திற்குரிய போக்கை விலக்கப் பட்டபின் வரும் செய்தி	முறையற்ற போக்கு
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(3)+(6)=(7)	(8)=(7)−(4)
1952	I	121·30	...	...	...	...	...
	II	79·80	...	...	...	...	...
	III	118·30	98·24	−20·06	−21·14	97·16	−1·08
	IV	80·40	97·50	+17·10	+19·76	100·16	2·66
1953	I	107·60	98·76	− 8·84	−12·06	95·54	−3·22
	II	87·50	98·90	+11·40	+13·45	100·95	2·05
	III	120·80	99·05	−21·75	−21·14	99·66	0·61
	IV	78·90	99·09	+20·19	+19·76	98·66	−0·43
1954	I	110·40	98·70	−11·70	−12·06	98·34	−0·36
	II	85·00	98·42	+13·42	+13·45	98·45	0·03
	III	120·20	98·84	−21·36	−21·14	99·06	0·22
	IV	77·30	99·52	+22·22	+19·76	97·06	−2·46
1955	I	115·30	99·89	−15·41	−12·06	103·24	3·35
	II	85·60	101·36	+15·76	+13·45	99·05	−2·31
	III	122·50	...	...	...	...	...
	IV	86·80	...	...	...	...	...

மூன்ருவது அட்டவணை

கொடுத்த செய்திக்கும், நகரும் சராசரிகளுக்குமுள்ள விலக்க மதிப்புகளை ஒவ்வோர் ஆண்டின் நான்கு பருவங்களுக் கேற்றவாறு மாற்றி அமைக்கப்பட்ட அட்டவணை.

ஆண்டு	பருவம்			
	1	2	3	4
1952	...	...	—20·06	17·10
1953	— 8·84	11·40	—21·75	20·19
1954	—11·70	13·42	—21·36	22·22
1955	—15·41	15·76	...	...
மொத்தம்	—35·95	40·58	—63·17	59·51
சராசரி	—11·99	13·53	—21·06	19·84
திருத்தம்	— 0·08	—0·08	— 0·08	— 0·08
பருவங்களுக் குரிய திருத்தம்	—12·06	13·45	—21·14	+19·76


y
"——" தரப்பட்ட செய்திகளுக்குரிய போக்கு
"......" 4 பருவங்களுக்குரிய நகரும் சராசரிகளின் போக்கு.
நடந்த திருமணங்களின் எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்)
125
115
105
95
85
75
ஸ்கேல்
x-அச்சு-1" =1 ஆண்டு
y-அச்சு-1" =10 (ஆயிரத்தில்)
1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4
x
1952
1953
1954
1955
ஆண்டுகள்

படம்-50

பயிற்சிகள்

1. பின்வரும் செய்திகளுக்கு 5 ஆண்டுகளைக் காலப் பகுதியாகக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுக. கொடுக்கப்பட்ட செய்திகளையும், நகரும் சராசரிகளுக்கு ஏற்ற போக்கையும் வரைபடமூலம் விளக்கிடுக.

ஆண்டு		சேமிப்பு	ஆண்டு		சேமிப்பு
1920	...	70	1930	...	68
1921	...	70	1931	...	68
1922	...	72	1932	...	71
1923	...	68	1933	...	70
1924	...	70	1934	...	71
1925	...	72	1935	...	75
1926	...	73	1936	...	76
1927	...	69	1937	...	77
1928	...	71	1938	...	79
1929	...	70	1939	...	80

2. ஒரு ரப்பர் பட்டையை p பவுண்டு பளுவுக்கு ஏற்ற விசையைக் கொண்டு இழுக்கும்போது, ரப்பர் பட்டையின் நீளத்தில் ஏற்பட்ட அதிகரித்தலை l மி.மி. எனக்கொண்டு, பின்வரும் செய்திகளுக்கு உகந்த ஒரு நேர்கோட்டை வரையறுக்க.

p :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l :	10	16	21	27	35	43	50	60	68	81	96

3. மிகக் குறைந்த வர்க்க முறையைக் கொண்டு, பின்வரும் விவரங்களுக்குரிய போக்கை ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்தி விளக்கிடுக :

x :	0	5	10	15	20	25	30
y :	9	13	20	24	30	35	40

4. பின்வரும் செய்திகளுக்குகந்த போக்கை

$y=a+bx+cx^2$ என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்க.

இங்கு x என்பது தண்ணீர் ஊற்றியதின் ஆழத்தை அங்குலத்திலும், y என்பது விளைச்சலை டன்னிலும் அறிவிப்பதாகக் கொள்க.

x:	0	10	20	30	40
y:	30	50	60	75	70

17. மக்கட் கணிப்பு

(Census)

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில், ஒரு நாட்டின் மக்கள் தொகையைக் கணக்கிடுவதே மக்கட் கணிப்பாகும். மக்களின் எண்ணிக்கை இனம், வயது முதலியவற்றையும், சமூகத்தைச் சார்ந்த நிலைகளான மக்களின் உடல்நலம், திருமணத்திற்குரிய நிலைமைகள் (marital conditions), தொழில் செய்வதின் வகைகள், எழுத்தறிவின் நிலைமைகள் ஆகியவற்றையும், அங்கஹீனமானவர்கள், குருடர்கள், செவிடர்கள் ஆகிய மக்களின் எண்ணிக்கையையும் அரசாங்கம் செவ்வனே நடத்துவதற்காகவும் மக்கட் கணிப்பு மேற்கொள்ளப்படுகிறது. தவிரவும், மக்களின் சமூக, பொருளாதாரத்துறைகளையும்; வாழ்க்கைப் படித்தர முன்னேற்றங்களையும் அவ்வப்போது அறியவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. மேலும், ஒரு மாவட்டத்திற்கும் மற்றொரு மாவட்டத்திற்கும் இவ்விதத் துறைகளில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க மக்கட் கணிப்பு பெரிதும் பயன்படுகிறது. நாட்டின் செல்வ நிலையை அறிந்து, ஒவ்வொருவருக்கும் சராசரியாக வரக்கூடிய செல்வத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு, மக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை தெரிந்திருக்கவேண்டும். நாட்டில் உற்பத்தி செய்யப்படும் உணவுப் பொருள்கள், மக்களின் தேவைக்குப் போதுமானதா அல்லது மற்ற நாடுகளிலிருந்து தருவிக்கவேண்டுமா என்றறிவதற்கும் மக்கட் கணிப்பு மிகவும் முக்கியமானதே.

எனவே, நாட்டின் சமூக, பொருளாதார, வர்த்தகத் துறைகளின் முன்னேற்றத்தைப் பொதுவாக அறிவதற்கு, மக்கள் தொகையைக் கணக்கிடுவது இன்றியமையாததாகும்.

மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பின் முக்கியத்துவம்

மக்கட் கணிப்பின் அடிப்படை வாயிலாகத்தான், சமூக, பொருளாதாரத் துறைகளில் விசாரணைகள் நடத்தி, அதற்கேற்ப சமூக

சீர்திருத்த மசோதாக்களையும், சட்டங்களையும் இயற்றமுடியும். இறப்பு அல்லது இழப்புக்கு முன்காப்பீடு செய்வதில் (insurance aganist death and loss) நாட்டு மக்களின் இறப்பு வீதங்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. எனவே, இறப்பு வீதங்களைக் கணக்கிட ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட வயதுப் பிரிவில் வாழும் மக்களின் எண்ணிக்கையையும், அவ் வயதுப் பிரிவுகளில் ஆண்டுதோறும் இறக்கும் மக்களின் எண்ணிக்கையையும் கணக்கெடுக்கப்பட வேண்டியது அவசியமாகிறது.

வணிகத் தொழிலில் ஈடுபடுவோரும், கைத்தொழில், இயந்திரத் தொழிலில் பொருள்களை உற்பத்தி செய்வோரும் மக்களின் நெருக்கத்திற்கேற்றவாறு, விற்பனைக் களங்களை நிறுவனம் செய்யவேண்டியிருக்கிறது. பொருளாதாரத் துறை ஆராய்ச்சிகளில் மக்கள் எந்தெந்த வேலையிலீடுபட்டுள்ளார்கள் என்பதையும், சிற்றூரில் குடியிருக்கும் மக்கள், மாநகருக்குக் குடிபோவதையும் (movement of population), மக்கட் பெருக்கத்தின் விகிதத்தையும் கணக்கிட வேண்டியிருக்கின்றன.

இந்தியாவில் மக்கட் கணக்கெடுப்பு

இந்தியாவில் 1881ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி மாதம் முதல், பத்து ஆண்டுகளுக்கொரு முறையாக மக்கட் கணிப்பு நடைபெற்று வருகிறது. பிப்ரவரி 1881, பிப்ரவரி 1891, மார்ச்சு 1901, மார்ச்சு 1911, மார்ச்சு 1921, பிப்ரவரி 1931, மார்ச்சு 1941, பிப்ரவரி 1951, பிப்ரவரி 1961ஆகிய காலங்களில் இந்திய மக்கட் தொகைக்குரிய செய்திகள் திரப்பட்டுள்ளன.

மக்கட் கணிப்பு எடுத்தலின் முறை

நாட்டின் எல்லைக்குள், ஒரு குறிப்பிட்ட தேதியில், உயிருடனிருக்கும் ஒவ்வொரு நபரையும் கணக்கெடுப்பதே மக்கட் கணிப்பு எனப்படும் என முன்பே கூறியுள்ளோம். மக்கட் கணிப்பெடுப்பது மிகப் பெரிய வேலையாகும். அதற்கென முன்கூட்டியே ஒரு திட்டம் வகுத்துக்கொள்ளவேண்டும். இவ்வேலையைப் பூர்த்தி செய்ய, அரசியல் துறைகளில் வேலை செய்பவரின் உதவி மிகத் தேவைப்படுகிறது. எனவே, அரசாங்கத்தாரால் திட்டமிட்டு, இயக்கப்பட்டு மக்கள் தொகை கணக்கெடுக்கப்படுகிறது. இந்தியாவில் மக்கட் கணிப்பு வேலை மத்திய அரசாங்கத்தைச் சேர்ந்தது. அவர்கள் மக்கட் கணக்கெடுப்பின் துவக்க காலம், முடிவுகாலம், அமைப்புமுறை இயக்கு முறை முதலியவற்றைத் தீர்மானிக்கிறார்கள். 1948ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்புச் சட்டத்தின்படி, மத்திய அரசாங்கத்திற்கு, மக்கட்கணிப்பு எடுப்பதில் தேவையான கணிப்பாளர்களை நியமிப்

பதற்கும், அரசியல் துறையில் பணி செய்பவருக்கு அதிகாரம் கொடுப்பதற்கும், மக்கட் கணிப்பு அதிகாரிகளின் வேலைகளை வரையறுப்பதற்கும், மக்களைப் பேட்டி காண்பதற்கும் உரிமைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும், கணிப்பாளர்கள் கேட்கும் கேள்விகளுக்கு உண்மையான தகவல்களைத் தெரிவிக்க, மக்கள் சட்டபூர்வமாகக் கட்டுப்பட்டவர்கள். மக்கள் தெரிவிக்கும் உண்மையான தகவல்கள் மற்றவர்களுக்குத் தெரிவிக்கப்படமாட்டாதென்றும், அத்தகவல்கள் நீதிமன்றத்தில், தெரிவித்தவர்களுக்கெதிராகப் பயன்படுத்தப்படமாட்டாது என்றும் சட்டத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. எனவே, தகவல்களைத் தெரிவிப்பவர்கள், தயக்கமின்றி அவர்களது உண்மையான ஊதியம், வயது, மற்ற நிலைமைகள் ஆகியவற்றை வெளிப்படுத்தலாம்.

மக்கட் கணிப்பின் அமைப்புமுறை

மக்கட் கணிப்பு எடுப்பதற்காக, அமைக்கப்படும் முறையைப் பின்வருமாறு நான்கு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

1. கணிப்பில் ஈடுபடுவோரை நியமித்தல்
2. மாநில ஆட்சிக்கேற்றவாறு நாட்டைப் பிரித்தல்
3. கணிப்பாளர்களுக்குப் பயிற்சியளித்தல்
4. மக்கட் கணிப்பெடுத்தலின் செயல்முறை

இந்தியக் குடியரசின் முழுப்பகுதிக்கும் ஓர் அதிகாரி நியமிக்கப்படுவார். அவருக்கு 'மக்கட் கணிப்பு ஆணையாளர்' (Census Commissioner) என்று பெயர். முழுக் கணிப்பு விவரம் சேகரிப்பதில் இவர்தான் இயக்குநராகவும், வழிகாட்டியாகவும், செயல்முறையைத் தொகுப்பவராகவும் இருக்கிறார். ஒவ்வொரு மாநிலப் பகுதிக்கும் ஒரு மக்கட் கணிப்பு மேற்பார்வையாளர் (Supelintendent) உண்டு. பெரும்பாலும் மேற்பார்வையாளர், அம் மாநிலப் பகுதியைச் சேர்ந்தவராகவே இருப்பார். ஏனெனில், அவருக்குத்தான் அம் மாநிலப் பரப்பின் நிலைமை, அரசியலமைப்பு முறை ஆகியவை தெரிந்திருக்கும். மாநில அரசாங்கத்தார், அரசியல் துறையில் ஈடுபடுவோரனைவரையும் மேற்பார்வையாளரிடம் ஒப்படைக்கிறார்கள். மாநில அரசாங்கத்தைச் சார்ந்த எல்லா அலுவலகங்களிலும் பணி செய்வோரும், நகராட்சி மன்றம், ஊராட்சி மன்றம், பள்ளிகள், கல்லூரிகள் ஆகியவற்றில் பணி செய்வோரும் தொண்டு செய்யும் மனப்பான்மையுடையவராகவும் ஊதியமின்றிப் பணி செய்வதற்கும் முன் வருகிறார்கள்.

கணக்கெடுப்பதற்காக, நாட்டைப் பல மாநிலப் பகுதிகளாகவும், ஒவ்வொரு பகுதியையும், தனித்தனியே பல உட்பிரிவுகளாகவும்

பிரித்து அமைப்பது வழக்கம். ஒவ்வொரு நபரையும் மக்கட் கணிப்பில் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டியிருப்பதால், அவர் வழக்கமாக வசிக்கு மிடத்திலேயே பதிவு செய்யப்படுகிறார். இதற்காக, ஒவ்வொரு மாவட்டமும் பல சிறு சிறு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுக் கொண்டே வந்து, இறுதியில் வரும் பிரிவு, அவரவர்கள் வசிக்கும் வீடாகிவிடு கிறது. ஒவ்வொரு வீட்டிலுள்ள நபர்களனைவரையும் கணக்கில் சேர்த்துக் கொள்வதால், ஒவ்வொரு வீடும் வரிசையாக, இலக்கத் தால் பதிவு செய்யப்படும். இதற்காக வீடுகளின் கதவு நிலைகளில் எண்கள் குறிக்கப்படும்.

மக்கட் கணிப்பில் பங்கெடுத்துக் கொள்பவரின் எண்ணிக்கை அதிகமாகவுள்ளதாலும், அவர்களனைவரும் ஒரே சீரான தகவல் களைச் சேகரிக்க வேண்டியிருப்பதாலும், கணக்கெடுப்பு முறையில் பயிற்சியளிக்கப்படுகிறது. மக்களைப் பேட்டிகாணும்போது, அவர் களிடம் பண்பமைதியுடையவராகவும், வினாக்களை நேர்மையான முறையிலும் பணிவுடனும் கேட்பதற்கும், மக்கள் உண்மையான தகவல்களைத் தெரிவித்தலுக்குரிய சூழ்நிலையை அமைத்துக்கொள் வதில் பொறுமையை இழக்காமலிருப்பதற்கும் பயிற்சியளிக்கப் படுகிறது.

மக்கட் கணிப்பு எடுப்பதற்கு இரண்டு அல்லது மூன்று மாதங் களுக்கு முன்பே ஒவ்வொரு பகுதியிலுமுள்ள ஒவ்வொரு வீட்டின் கதவிலும், எண்கள் குறிக்கப்படுகின்றன. தினசரிப் பத்திரிகை மூலமும், அரசாங்கத்தார் வெளியீடுகளின் வாயிலாகவும் மக்களுக்குக் கணக்கெடுப்பின் முக்கியத்துவத்தைப் பற்றியும், மக்கள் கணிப் பாளர்களுடன் ஒத்துழைக்க வேண்டியதன் அவசியத்தைப்பற்றியும் எடுத்துரைக்கின்றனர். கணிப்பாளர் ஒவ்வொருவருக்கும் வினாத்தொகுதிப் பட்டியல்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. கணிப்பாளர் வீட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு நபருக்கும் ஒரு வினாப் பட்டியலைப் பயன்படுத்துவார். மக்களை ஒவ்வொருவராக எண்ணிக்கையிடுவதுமட்டும் மக்கள் கணக்கெடுப்பல்ல. அவர்கள் ஒவ்வொருவரது இனம், மதம், திருமணத்திற்குரிய நிலைமை (marital status), பொருளாதார நிலைமை, கல்வியறிவு, தொழில் ஆகியவற்றைத் தெரிவிப்பதற்கும் பட்டியலில் இடமளிக்கப் பட்டுள்ளது. பட்டியலைப் பூர்த்தி செய்யும் முறைகளைப்பற்றி, முன்பே கணிப்பாளர்களுக்குப் பயிற்சியளிக்கப்பட்டுள்ளதால், பட்டியல்களில் ஒழுங்காகவும், ஒரே மாதிரியாகவும் தகவல்கள் பதிவு செய்யப் படுகின்றன.

பொதுவாக, பிப்ரவரி மாதம் 10ஆம் தேதியிலிருந்து மார்ச்சு மாதம் 5ஆம் தேதிவரையிலுள்ள காலப் பகுதியில், கணிப்பாளர்

ஒவ்வொருவரும் தனக்குக் குறிப்பிட்டுள்ள பகுதியில் ஒவ்வொரு வீட்டிற்கும் சென்று, குடும்பத் தலைவர்மூலம் வீட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு நபருக்குரிய செய்திகளை விளுப்பட்டியலில் பூர்த்திசெய்து, அவர்களைக் கணக்கெடுப்பில் சேர்த்துக் கொள்வார். பிறகு மார்ச் 1, 5 தேதிகளில், மற்றொருமுறை வீடு வீடாகச் சென்று, மார்ச்சு 1ஆம் தேதி சூரியன் உதிக்குமுன் பிறந்த குழந்தைகள், இறந்தவர்கள், வீட்டிற்குப் புதிதாக வந்தவர்கள் ஆகியோர்களைக் கணக்கெடுப்பில் சேர்த்துக் கொள்வர். இதற்காக மக்கட் கணிப்பு நாள், எல்லோருக்கும் விடுமுறை நாளாக்கப்படுவது வழக்கம்.

சென்ற கணக்கெடுப்பு எடுத்து ஏறக்குறைய பத்து ஆண்டுகள் முடிவடைந்த பிறகே மறுமுறை கணிப்பு எடுக்கப்படும். திருவிழா போன்ற கொண்டாட்ட நாட்களாக இராத நாளே, மக்கட் கணிப்பு நாளாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. எந்த நபரின் பெயரும் கணக்கில் இரு முறைகளோ, இரு இடங்களிலோ குறிக்கப்படாமலிருப்பதிலும், ஒருவரும் கணக்கெடுப்பில் விட்டுப் போகாமலிருப்பதிலும் மிகுந்த கவனம் செலுத்தப்படுகிறது.

1931ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவில் மக்கள் தொகையைக் கணக்கெடுப்பதற்கு, ஒரு சில நாட்களுக்கு முன்பே தற்காலிகமான விவரங்களைக் கண்டு, கணக்கெடுப்பு நாளில் (மார்ச்சு மாதம் 1ஆம்தேதி) அவ்விவரங்களைச் சரிப்பார்த்து, நபர்கள் எந்தெந்த இடத்தில் காணப்பட்டனரோ, அங்கங்கேயே எண்ணிக்கையிடப்பட்டனர். இம்முறையில் அநேக கணிப்பாளர்களை நியமிக்கவேண்டியிருந்தது. தவிரவும், கணக்கெடுப்பை ஒரே நாளில் பூர்த்தி செய்யவும் வேண்டியிருந்தது. எனவே, 1941ஆம் ஆண்டில் இம்முறை கைவிடப்பட்டது. இதற்குப்பதிலாக, பொதுவாக மக்கள் எந்த இடத்தில் வசிக்கிறார்களோ, அந்த இடத்திலேயே கணக்கில் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட்டனர். ஆதலால், 1941ஆம் ஆண்டில் மக்கட் கணிப்பு பிப்ரவரி 8ஆம் தேதி துவங்கி, பிப்ரவரி 28 ஆம் தேதி முடிவுற்றது. இந்த இருபது நாட்களிலும், கணிப்பாளர்கள் மக்களை அவரவர்கள் வசிக்குமிடத்திற்கேற்றவாறு கணக்கெடுத்தனர். ஆதலால் இவ்வாண்டு கணக்கெடுப்பில் கணிப்பாளர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்க முடிந்தது. விளுத்தொகுதிக்குப் பதிலாக, எண்ணிக்கையிடும் சிறு துண்டுத்தாள் (enumeration slip) பயன்படுத்தப்பட்டது. இதில் பல குழூஉக் குறித்தொகுதிகளை (codes) யிட்டு, விவரங்கள் சுருக்கமாகத் தொகுக்கப்பட்டன.

1941ஆம் ஆண்டு கணக்கெடுப்பில் சமயவாரியாக மக்களைப் பிரிப்பதற்குப் பதிலாக, சாதிவாரியாகப் பிரிக்கப்பட்டனர். இயந்திரத்தைக்கொண்டு பட்டியலமைப்பு தயாரிக்கப்பட்டது. இதற்கேற்ப,

மக்கட் கணிப்பின் துண்டுத்தாளில் குறிப்பிட்ட இடங்களில் சிறுதுளை கள் செய்யப்பட்டிருந்தன. இயந்திரத்தின் வாயிலாக, ஒருவிதத் துளைகளுள்ள அட்டைகள் எடுக்கப்பட்டு, அக்குறித்துளைகளுக்குகந்த செய்திகளைத் தொகுக்க முடிந்தது. மாதிரித் தேர்வுகளின் அடிப் படையில்; ஒரு சில செய்தி அட்டைகளையெடுத்து, ஆராயப்பட்டு, முழுக் கணிப்பின் வாயிலாகக் கண்டறிந்த செய்தி விவரங்களை, இத் துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப்பட்டது. மாதிரிகளின் மூலமாகக் கிடைத்த விவரங்கள், முழுமைத் தொகுதியைச் செவ்வனே அறிவித் திருப்பதையும் கவனிக்கத்தக்கது.

முதல் குழந்தை பிறக்கும்போது, தாய்மார்களின் வயதையும், அவர்கள் பெற்றெடுத்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையையும், இனப் பெருக்கத்தின் வீதத்தைக் கணக்கிடுவதற்காகச் சேகரிக்கப்பட்டன. முதல் முதலாக எழுதப்படிக்கத் தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கையும் கணக்கெடுக்கப்பட்டது.

1951ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பு

இது, இந்தியா சுதந்திரம் பெற்றபின் எடுக்கப்பட்ட முதல் மக்கட் கணிப்பாகும். பிப்ரவரி 9ஆம் தேதியிலிருந்து, மார்ச் 1ஆம்தேதி வரை மக்கட் கணிப்பு விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. காஷ்மீர் பகுதியைத் தவிர, மற்ற எல்லாப் பகுதிகளிலுமுள்ள மக்களனைவரும் கணக்கிடப்பட்டனர். 1941ஆம் ஆண்டைப் போலவே, இவ்வாண்டி லும், எண்ணிக்கையிடும் தாள் (enumeration slip) பயன்படுத்தப்பட் டது. அதில் பொருளாதாரம், வாழ்க்கை நிலைமை, தாய்மொழி, ஜீவனம், எழுத்தறிவு முதலியனவற்றைத் தெரிவிப்பதற்கான 14 வினாக்கள் குறிக்கப்பட்டிருந்தன. பட்டியலமைப்பில் பதிமூன்றாவ தாகக் கேட்கும் கேள்வியை, அந்தந்த மாநில ஆட்சித்துறைக்கு விருப்பமான எச்செய்தியை வேண்டுமென்றாலும் தருவிப்பதற்குப் பயன்படுமாறு அமைத்திருந்தனர். ஆனால், மற்றப் பதிமூன்று வினாக் களும் எல்லா மாநில அரசாங்கத்தாருக்கும் பொதுவானதாக இருந்தன.

1951-ல் உபயோகித்த எண்ணிக்கையிடும் மாதிரிச் சான்றுத் தாள் பின்வரும் அமைப்பைப் பெற்றிருந்தது.

1. நபரின் பெயரும், இவருக்கும் குடும்பத் தலைவருக்கும் உள்ள உறவு } ....
2. (a) நாட்டினம்.................... (b) சமயம்................
   (c) சாதிப்பிரிவு :................
3. பொது வாழ்வுக்குரிய நிலைமைகள் : } திருமணம் ஆனவர்/ஆகாதவர்/ விதவை/மனைவியை இழந்தவர்

4. வயது :...........

5. பிறப்பிடம் :..................

6. பாகிஸ்தானிலிருந்து வெளியேற்றப்பட்ட தேதியும், பாகிஸ்தானில் எம் மாவட்டத்தைச் சேர்ந்தவர் } ......

7. தாய்மொழி :...........

8. இருமொழி தெரிந்தவர் :...........

9. பொருளாதார நிலைமை :.........வேலையிலீடுபடுதல் :.........

10. பிழைப்பிற்கான முதல் முக்கியத் தொழில்:...................

11. பிழைப்பிற்கான அடுத்து வரும் மற்றொரு தொழில்:.........

12. எழுத்தறிவும், கல்வியறிவும் :......

13. வேலையின்மை/பிணி/ :.........

14. பாலினம் :...........

ஒவ்வொருவருக்கும் ஒரு தனி எண்ணிக்கையிடும் தாள் பயன்படுத்தப்பட்டது. தாளில் செய்திகள் குழூஉக் குறிகள் (codes) மூலம் பதிவு செய்யப்பட்டன. எண்ணிக்கையிடும் தாளிலுள்ள வினுக்களைப் பூர்த்தி செய்யும்போது அறிவுறுத்தப்பட்ட செய்திகளின் சுருக்கம் பின்வருமாறு :

1. நபரின் பெயரும், இவருக்கும் குடும்பத்தலைவருக்கும் உள்ள தொடர்பு

குடும்பத்தலைவர் என்றறிய, பெயருக்கடுத்தாற்போல் '1' என்ற இலக்கத்தால் குறிப்பிடவும். நெருங்கிய உறவினர்களான மனைவி, மகன், மகள், சகோதரன், சகோதரி, தகப்பன் ஆகியவற்றைக் குறிப்பிட, பெயருக்கு அருகில் தகுந்த உறவுச் சொல்லை எழுதவும். மற்ற உறவினர்களை அறிவிக்க, பெயருக்கு அருகில் '2' என்ற இலக்கத்தால் குறிக்கவும். விருந்தினர்களாகில் 'V' எனக் குறிக்கவும்.

2. (*a*) **நாட்டினம் (அல்லது நாட்டுரிமை) : இந்திய நாட்டைச் சேர்ந்தவரை '1' எனக் குறிப்பிடவும்.**

(*b*) **சமயம் :** இந்துக்களை 'H' என்ற எழுத்தாலும், முகம்மதியரை 'M' என்ற எழுத்தாலும் குறிக்கவும்.

(*c*) சாதிப்பிரிவு : நபரின் சாதியைக் குறிக்கவும். சாதிப் பிரிவு வேறுபாடுகளில் நம்பிக்கையற்று, தன்னை எந்த சாதியிலும் சேர்த்துக் கொள்ள விரும்பாதவரை, '0' எனக் குறிப்பிடவும்.

3. பொது வாழ்வுக்குரிய நிலைமைகள் (Marital conditions)

திருமணமானவர், ஆகாதவர், விதவை அல்லது மனைவியை இழந்தவர் எனக் குறிப்பிடுவதற்கு முறையே, 1, 2, 3 என்ற இலக்கங்களை எழுதவும்.

4. வயது

கடைசியாகக் கொண்டாடிய பிறந்ததின வயதைக் குறிக்கவும். அதாவது வயதைக் குறிப்பிடும்போது, பூர்த்தியான ஆண்டின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கவும். ஒரு வயதுக்குக் கீழ்ப்பட்ட குழந்தைகளின் வயதைக் குறிக்க '0' என எழுதவும்.

ஒவ்வொரு கணிப்பாளரிடமும் அவருக்குரிய பகுதியில் நடைபெற்றிருக்கும் சில முக்கியமான நிகழ்ச்சிகளின் விவரம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். ஏனெனில், கல்வியறிவில்லாதவர்களைப் பேட்டி காணும்போது, அவர்கள் தங்கள் வயதைத் தெரிவிப்பதற்குப் பதிலாக, அவர்களது வாழ்நாளில் நிகழ்ந்த சில முக்கிய நிகழ்ச்சிகளை அறிவிக்க நேரிடலாம். இவைகளின் வாயிலாக, அவர்களின் வயதை ஏறக்குறைய மதிப்பிட முடியும்.

5. பிறப்பிடம்

கணிப்பு எடுக்கப்படும் மாவட்டத்தில் பிறந்தவரை, '1' எனக் குறிப்பிடவும். மற்றவர்களின் பிறப்பிடத்தை அவர்கள் எம் மாவட்டத்தில் பிறந்தார்களோ, அந்த மாவட்டத்தின் பெயரால் குறிப்பிடவும். பிறந்தநாடு இந்தியா அல்லது மேல்நாடு என்பதையும் குறிப்பிடவும்.

6. அகதிகள் (Displaced persons)

1947ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு 1ஆம் தேதியிலிருந்து, மேற்கு பாகிஸ்தானிலிருந்து வந்தவராகவும், அல்லது 1946ஆம் ஆண்டு அக்டோபர் 15ஆம் தேதியிலிருந்து, கிழக்குப் பாகிஸ்தானிலிருந்து பலவந்தமாக வெளியேற்றப் பட்டவராகவும், அல்லது உள்நாட்டுக் கலவரங்களுக்குப் பயந்து இந்தியாவில் அடைக்கலம் புகுந்தவராகவுமிருந்தால், அவர் இந்திய எல்லைக்குள் வந்த தேதியையும், பாகிஸ்தானில் எம் மாவட்டத்தைச் சேர்ந்தவரென்பதையும் குறிக்கவும்.

7. தாய்மொழி

நபரின் தாய்மொழியைக் கேட்டு, அதைக் குறிப்பிடவும். சிறு குழந்தை, செவிடு, ஊமை ஆகியோரின் தாய்மொழியை, அவர்களின் பெற்றோர்கள் பேசும் மொழியால் குறிப்பிடவும்.

8. இருமொழி தெரிந்தவர்

தன் தாய்மொழியைத் தவிர வேறு ஏதாவதொரு இந்திய மொழியைப் பேசத்தெரிந்தவராளுல், அம் மொழியைக் குறிப்பிடவும்.

9. பொருளாதார நிலைமை

தன் வருமானத்தைக் கொண்டு தன்னைத்தானே காத்துக் கொள்ளும் நிலையிலுள்ளவர், தன்வருமானம் பற்ருக் குறைவால் பிறரை அண்டியிருப்பவர், ஒருவித ஊதியமுமின்றியிருப்பவர் என்றிவ்வாராகக் குடும்பத்திலுள்ள ஒவ்வொருவரின் நிலைமையையும் தெரிவித்தல் வேண்டும்.

வேலையிலீடுபடுதல் : தன்னைத்தானே காப்பாற்றிக் கொள்ளும் நிலையிலுள்ளவர்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தல் வேண்டும். தன் வாழ்க்கைத் தொழிலில் (அல்லது தன் குடும்பத் தொழிலில்), பிறரையும் வேலைக்கு அமர்த்தி ஊதியம் கொடுப்பவராகில், அவரைப் 'பணி முதல்வர்' (Employer) எனக் குறிக்கவும். மற்றவரைப் (Aemployees) பிழைப்புக்காக வேலையிலீடுபட்டு ஊதியம் பெறுபவர்கள் எனக் குறிக்கவும்.

எவராலும் பணித்துறையில் அமர்த்தப்படாதவரும், பிறரைத் தன் ஜீவனத்திற்காக வேலையில் அமர்த்திக் கொள்ளாதவருமாகில் அவரைத் 'தன்னிலையுடைய உழைப்பாளி' (Independent worker) எனக் குறிப்பிடவும்.

10. பிழைப்பிற்கான தொழில்களில் அதிக வருவாய்க்குரிய முக்கிய முதன்மைத் தொழில்

தன்னைத்தானே காத்துக் கொள்ளும் நிலையிலுள்ளவராகில், வருமானத்தின் தோற்றுவாயைக் குறிப்பிடவும். வருமானம் பல வகைகளின் வாயிலாக வருமாளுல், அவற்றில் எத்தொழிலில் அதிக வருமானமுள்ளதோ அதனைக் குறிப்பிடவும்.

11. பல துறைகளில் வருவாய் கிடைக்குமாளுல்

அவைகளில் முக்கிய முதன்மைத் தொழிலுக்கு அடுத்ததாக வரும் தொழில் துறையைக்குறிப்பிடவும்.

12. எழுத்தறிவும், கல்வியறிவும்

எழுதப் படிக்கத் தெரியாதவரை '0' என்ற இலக்கத்தாலும், படிக்கமட்டும் தெரிந்தவரை '1' என்ற இலக்கத்தாலும், எழுதவும், படிக்கவும் தெரிந்தவரை '2' என்ற இலக்கத்தாலும் குறிப்பிடவும். எழுதப்படிக்கத் தெரிந்திருந்து, கல்வியறிவுமுள்ள வராகில், படிப்பில் அவர் பெற்ற உயர்ந்த தேர்ச்சியைக் (Highest Examination Passed) குறிப்பிடவும்.

13. வேலையின்மை......பிணி

சென்னை மாநிலப் பகுதியில் குட்டநோயால் பீடிக்கப்பட்டவர் களின் செய்திகள் திரட்டப்பட்டன.

14. பாலினம்

ஆண்பாலரை '1' எனவும், பெண்பாலரை '2' எனவும் குறிப்பிடவும்.

1951ஆம் ஆண்டின் மக்கட் கணக்கெடுப்பைக் கவனிப்போம். ஒரு தனிப்பட்ட முக்கிய நுழைவாயுள்ள வீடு (house with a main entrance) வசிக்குமிடமாகக் கருதப்பட்டது. ஒரே சமயற்கட்டில் உணவு உண்போரனைவரும் ஒரே குடும்பத்தினராகக் (Household) கருதப்பட்டனர். இதனால் குடும்பங்களை நபர்களின் எண்ணிக் கைக்குத் தகுந்தவாறு, தரம்பிரித்து ஆராய்வதிலும், கூட்டுக் குடும்ப முறையின் (Joint Family System) பொருளாதாரச் சிக்கல்களை ஆராய்வதிலும் கவனம் செலுத்தப்பட்டது.

1951ஆம் ஆண்டின் மக்கட் கணிப்பு இயக்கம்

முதல் வட்டம் 20 நாட்கள் கொண்ட (பிப்ரவரி 9ஆம் தேதி யிலிருந்து, பிப்ரவரி 28ஆம் தேதிவரை) காலப்பகுதியில் ஏறக்குறைய 7 இலட்சம் கணிப்பாளர்கள் நியமிக்கப்பட்டு, அவரவர்களுக்கென குறிப்பிட்டப் பகுதியில், ஒவ்வொரு வீட்டிலுமுள்ள நபர்கள் ஒவ்வொருவருக்கும், ஒரு கணக்கிடும் தாளைப் பயன்படுத்தி, விவரங்கள் திரட்டப்பட்டன. பிறகு இரண்டாவது வட்டம் மார்ச்சு மாதம் 1ஆம் தேதியிலிருந்து மூன்று நாட்கள் கொண்ட காலப் பகுதியில் திரட்டின செய்திகளை மறுமுறை சரிபார்த்தும், இடைக் காலப்பகுதியில் நிகழ்ந்த பிறப்பு, இறப்பு முதலியவற்றின் எண்ணிக் கையைக் கணக்கில் சேர்த்தும் அல்லது விலக்கியும், முன்வட்டத்துக் கணக்கெடுப்பில் சேர்க்கப்படாமலிருந்தோரைச் சேர்த்தும் கணக் கெடுக்கப்பட்டது. நாடோடிக் கூட்டத்தினர், பிச்சைக்காரர்கள், தெருவில் வசிப்போர் முதலியவர்கள், மக்கட் கணிப்பு நாளன்று (1—3—1951) கணக்கெடுப்பில் சேர்க்கப்பட்டனர்.

ஒவ்வொரு நபரிடமிருந்தும் கிடைத்த தகவல்கள், அந்தந்த மாவட்ட அலுவலகத்தில், நாட்டு மக்களைச் சார்ந்த புத்தகத்தில் (National Register of Citizens) பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளன.

1951 ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பின் வாயிலாக அறிந்த விவரங்கள்

(1) மக்கள் தொகை: 356·8 மில்லியன்கள். இவற்றில் ஆண்கள் 183·3 மில்லியன்கள்; பெண்கள் 173·5 மில்லியன்கள்.

(2) 1932ஆம் ஆண்டிலிருந்து, இந்தியாவில், மக்கள் தொகை, ஏறக்குறைய 12·9% ஆக அதிகரித்துக் கொண்டு வருகிறது.

(3) இந்தியக் குடியரசின் மக்கள் தொகை, உலகத்தில் வாழும் மக்களில் ஏழில் ஒரு பகுதியாகும்.

(4) மக்களில் 70% (ஏறக்குறைய) வேளாண்மைத் தொழிலை நம்பிப் பிழைப்பவர்கள்.

(5) ஆண்களின் எண்ணிக்கை 1000-க்கு, பெண்களின் எண்ணிக்கை 947ஆக வுள்ளது.

(6) ஒரு சதுர மைலுக்குச் சராசரியாக 300 பேர் உள்ளனர்.

(7) எழுத்தறிவுள்ளவர்கள் 16·6%

(8) குழந்தை பிறந்தவுடன், அது உயிருடன் இருப்பதில் எதிர் பார்க்கப்படும் சராசரியான வாழ்நாள் (expectation of life at birth) = 32·45 ஆண்டுகள்.

(9) முதலைந்து பெரிய நகரங்களின் மக்கள் தொகை: (i) கல்கத்தா 29·82 இலட்சம்; (ii) பம்பாய் 28·39 இலட்சம்; (iii) சென்னை 14·16 இலட்சம்; (iv) டெல்லி, புதுடெல்லி 11·91 இலட்சம்; (v) ஹைதராபாத் 10·85 இலட்சம்.

1961 ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பு

உயர்திரு. மித்திரா என்பவர் மத்திய அரசாங்கத்தாரால் மக்கட் கணிப்பு ஆணையாளராக நியமிக்கப்பட்டார். இந்தியக்குடியரசின் நிலப் பரப்பு முழுவதுடன், ஜம்மு, காஷ்மீர் பிரதேசங்கள், சிக்கிம் போன்ற

மற்றப் பகுதிகளும் சேர்ந்த பரப்பில் மக்கள் தொகைக் கணக்கெடுப்பு நடைபெற்றது. 1951ஆம் ஆண்டைப் போலவே, 1961ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு மாதம் 1ஆம் தேதி மக்கட் கணிப்பு நாளாகக் கொள்ளப் பட்டது. பிப்ரவரி 10ஆம் தேதியிலிருந்து, மார்ச்சு 5ஆம் தேதி வரை யிலுள்ள காலப் பகுதியில், மக்களைச் சார்ந்த விவரங்கள் சேகரிக்கப் பட்டன.

நோக்கம்

முதலிரண்டு ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களின் வாயிலாக, அரசாங்கத் தார் நிறைவேற்றியுள்ள நன்மைகளை அளவிடுவதற்கும், மக்களின் சமூக, பொருளாதார, அறிவு வளர்ச்சியில் புதிய திட்டங்களை வகுப் பதற்கும், சீர்திருத்தங்கள் செய்வதற்கும் இக் கணக்கெடுப்பில் முக் கியத்துவம் கொடுக்கப்பட்டது. வேளாண்மை, குடும்ப வேலைகள், இன்னும் மற்றப் பொருளாதாரத் துறைகளால் நாட்டின் முன் னேற்றத்தை அறிவதிலும், நாட்டுப்புறம், நகர்ப்பகுதிகளிலுள்ள மக்களின் வாழ்க்கை நிலைமைகளை அறிவதிலும் இக் கணக்கெடுப்பு உதவியளிக்கும் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. சமூகத்திலுள்ள சமயப்பிரிவு, இனப்பிரிவு ஆகியவற்றின் விவரங்கள் இந்தியக் குடியரசின் சட்டத்திற்கு முரண்பாடில்லாமல் சேகரிக்கப்பட் டுள்ளன. தொழில், இடவமைப்பு ஆகியவற்றைச் சார்ந்த செய்திகளை, வயதுப்பிரிவு, இனப்பிரிவு (sex), கல்வியறிவுத் திறன் முதலிய பிரிவுகளைக் கொண்டு பாகுபடுத்தி ஆராய நோக்கம் கொண்டுள்ளது. கணக்கிடும் வினாத்தாளில் வரும் வினாக்களெல் லாம், இந்திய திட்ட அமைப்புக் குழுவின் கோரிக்கைப்படி தொகுக் கப்பட்டுள்ளன.

சென்ற மக்கட் கணிப்பைப்போலல்லாமல், 1961ஆம் ஆண்டு கணிப்பு, மக்களில் உண்மையாக எத்தனை பேர் நல்ல ஊதியம் பெறு கிறவரென்றும், ஊதியமின்றிக் குடும்ப வேலையில் ஈடுபட்டவரென் றும், வயிற்றுப் பிழைப்பை முன்னிட்டு, போதிய அளவு ஊதியம் பெற முடியாத வேலைகளில் ஈடுபட்டுள்ளவரென்றும் கணக்கிடுவதில் அதிகக் கவனம் செலுத்தியுள்ளது. மேலும், வேளாண்மைத் தொழி லில் சொந்தமாகப் பயிர் செய்வோர், பயிர்த் தொழிலில் கூலிக்காக வேலை செய்வோர், தன் குடும்பத் தொழிலில் ஈடுபடுவோர், கூலிக் காக வேலை செய்வோர், இன்னும் மற்ற இயந்திரத் தொழில்களில் பணி முதல்வராக ஈடுபடுவோர், அல்லது பணியில் அமர்த்தப்பட் டோர் என்று அறிய, தனித்தனி வினாக்கள் பட்டியலில் முக்கிய இடம் பெற்றுள்ளன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. ஏனெனில், சென்ற மக் கட் கணிப்பில் ஊதியம் பெறுதலையும், பெருமலிருத்தலையும் அடிப் படையாகக் கொண்டு, வினாக்கள் தொகுக்கப்படவில்லை.

1961 ஆம் ஆண்டின் மக்கட் கணிப்பில், தனி நபருக்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட வினுத்தாளின் அமைப்பு

இட அமைப்புக் குறியீடு: மாவட்டம்/தாலுக்கா/நகரம்/கிராமப்பிரிவு/வீட்டு எண்.

1. (a) நபரின் முழுப்பெயர் :..

(b) நபருக்கும் குடும்பத் தலைவருக்குமுள்ள உறவு } :......2. வயது

3. மணவாழ்க்கை நிலைமை: மணமானவர்/ஆகாதவர்/விதவை/மனைவியையிழந்தவர்/மண விலக்கானவர்/அல்லது பிரிக்கப்பட்டவர்.

4. (a) பிறப்பிடம் : ....

(b) பிறந்தது சிற்றூர்/நகரம் (R) (U)

(c) கணக்கெடுப்பிற்குரிய பகுதியில் குடியிருந்த காலம் (வேறு இடத்தில் பிறந்திருந்தால்)

5. (a) நாட்டினம்..............................

(c) ஒதுக்கப்பட்ட சாதியினர் / வகுப்பினர் (S. C) / (S.T.)

(b) சமயம்..............................

6. (a) தாய் மொழி........... (b) மற்ற மொழியும் அறிந்தவர்........

7. எழுத்தறிவும், கல்வியறிவும் : ....

8. பயிர் செய்பவர் :........... 9. வேளாண்மைத் தொழிலில் கூலி வேலை செய்பவர் } :..................

10. (a) குடும்பத் தொழில் அல்லது வாணிகம் :..........................

(b) குடும்பத் தொழிலின் வகை :.......................................

(c) வேலையிலீடுபடுதலின் வகை :

பணி முதல்வர்/பணியில் அமர்த்தப்பட்டவர்.

11. (a) மற்ற வேலையிலீடுபடுதல் : ....

(b) தொழிலின் வகை : இயந்திரத் தொழில்/வாணிகம்/வாழ்க்கைக்கான தொழில் (profession)

(c) பணி முதல்வர்/பணியில் அமர்த்தப்பட்டவர் :

(d) பணித்துறையின் பெயரும் முகவரியும் } ....

12. (a) வேலையிலீடுபடுதல்/ ஈடுபடாதிருத்தல் }

(b) வேலையிலீடுபடாமலிருந்தால் என்ன செய்து கொண்டிருப்பவர் : வீட்டுவேலை / மாணவர் / ஓய்வு பெற்றவர் / வாடகை பெறுபவர் / அண்டிப் பிழைப்பவர் / இரவலர் / நாடோடி / தண்டனை பெற்ற குற்றவாளி / வேலையில் ஒருபோதும் ஈடுபடாதவர்/ முன்பு வேலையிலிருந்து, தற்சமயம் வேலையிலீடுபடாதவர்.

13. பாலினம் :..................................

குடும்பத்தைச் சார்ந்தோரனைவருக்கும் பயன் படுத்தும் பட்டியல் அமைப்பு

இட அமைப்புக் குறியீடு : மாவட்டம்/தாலுக்கா/நகரம்/கிராமப் பிரிவு/வீட்டு எண்.

குடும்பத் தலைவரின் பெயர் ....

இந்திய நாட்டுரிமையில்லாதவராகில், அவரின் நாட்டினம் } ....

ஆண்கள் :........................பெண்கள்..................................

குடும்பத்திலுள்ளோரர் எவ்வளவு ஆண்டுகளாக இப்பகுதியில் தங்கியிருக்கின்றனர் } ....

1ஆம் பகுதி

A. வேளாண்மைத் தொழில் செய்வோர்

1. குடும்பத்திலுள்ளோரால் பயிரிடப்படும் நிலம்

(i) அரசாங்கத்தாருடையதாகவோ, குடும்பத்திற்கே உரியதாகவோ இருத்தல்.

(ii) தனி நபரிடமிருந்து குத்தகைப் பணம், அல்லது வாரத்திற்கு, அல்லது பங்குப் பணத்திற்கேற்றவாறு கொடுத்தல்.

(iii) முதலிரண்டின் மொத்தம்.

2. நிலச் சொந்தக்காரர் பணம் அல்லது மகசூல் பெறுவதன் பொருட்டு, மற்றவருக்குத் தன் நிலத்தைப் பயிரிடுவதற்காகக் கொடுக்கப்பட்டிருத்தல்.

B. இயந்திரத் தொழில் அல்லது மற்றத் தொழிலைச் சார்ந்த குடும்பத்தினர்

குடும்பத்தலைவர் ஒருவராலேயே நடத்தப்படும் கைத்தொழில், இயந்திரத் தொழில், வாணிகத் தொழில் முதலியவைகள். அல்லது அவரும், குடும்பத்திலுள்ள ஏனையோரும் தொழில் நடத்துவதில் ஈடுபடுதல்.	தொழிலின் பெயர்	வேலை நடைபெறும் மாதங்களின் எண்ணிக்கை.
	...	...
	(a) ...	...
	(b) ...	...

C. பயிர்த் தொழில் அல்லது குடும்பத்திற்குரிய தொழில் அல்லது மற்றத் தொழில்களில் வேலை செய்பவர்கள்.

குடும்பத் தலைவரும், குடும்பத்திலுள்ள மற்றவரும் நிரந்தரமாகச் சென்ற பருவத்தில்	வேலையிலீடுபடும் குடும்பத்தோரின் எண்ணிக்கை.	கூலிக்கு வேலை செய்பவர்கள்.
1. குடும்பப் பண்ணைத் தொழிலில்	...	...
2. குடும்பத் தொழில் அல்லது மற்றத் தொழில்	...	...
3. குடும்பப் பண்ணைத் தொழிலிலும், குடும்பத் தொழிலிலும்	...	...

வேலைக்கு அமர்த்தப்பட்ட விவரம்.

2ஆவது பகுதி

(1ஆவது பகுதியையும், தனி நபருக்கான வினாப்பட்டியல்களையும் பூர்த்தி செய்த பின் இதனைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.)

இனம்	எழுத்தறிவு	வேலையிலீடு படுவோர்	வேலையிலீடு படாதோர்	குடும்பத்தில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை		கணிப்பாளரின் கையொப்பம் தேதியுடன்	கண்காணிப்பாளர் கையொப்பம் தேதியுடன்
				ஓராண்டு வயதுக்குள் இருப்பவர்	மற்றவர்		
பெண்கள்							
ஆண்கள்							
மொத்தம்							

3ஆவது பகுதி : குடும்பத்திலுள்ளோரின் உறவு

(பட்டியலை அமைத்திடும் அலுவலகத்தில், தனிநபர்களின் வினாத் தாள்களை வகைவகையாகப் பிரித்தெடுத்தலுக்குமுன், பூர்த்தி செய்யத்தக்கது)

'√' என்ற சரி பார்க்கும் குறியைத் தகுந்த இடத்தில் போடவும்.

1. குடும்பத்திலுள்ளோர் அனைவரும் திருமணம் ஆகாதவர், விதவையானவர், மணவிலக்கானவர் அல்லது பிரிக்கப்பட்டவர் அல்லது திருமணத்திற்குப் பிறகு தற்காலிகமாகத் துணைவரைப் பிரிந்து வாழ்பவர்.
2. ஒரு தம்பதி குழந்தைகளுடன் / குழந்தைகள் இல்லாமல் உள்ள குடும்பம்.
3. இரு தம்பதிகள் குழந்தைகளுடன் / குழந்தைகள் இல்லாமல் உள்ள குடும்பம்.
4. இரு தம்பதிகளுக்கு மேல் குழந்தைகளுடன் / குழந்தைகள் இல்லாமல் உள்ள குடும்பம்.

5. மணமான தம்பதிகள் பெற்றோர்களுடன் வாழும் குடும்பம்.

6. மேற்சொன்ன வகையில் வராத குடும்பம்.

மக்கட் கணிப்பிலுள்ள குறைபாடுகள்

1. ஒவ்வொரு மக்கட் கணக்கெடுப்பின்போதும் ஒரு புதிய ஆணையாளர் நியமிக்கப்படுகிறார். அவரவர்கள் பின்பற்றும் முறைகளில் வேறுபாடுகள் இருக்கக்கூடும். வினாப்பட்டியலிலுள்ள வினாக்கள், நிலப்பகுதிகளின் அமைப்பு, செய்திகளைப் பாகுபடுத்துதல், கணக்கெடுப்பின் செயல்முறை முதலியவை ஒவ்வொரு கணிப்பின் போதும் மாற்றப்படுவதாலும் புள்ளி விவரங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடிவதில்லை.

2. கணிப்பாளர்கள் பெரும்பாலும் தற்காலிகமாகக் கணக்கெடுப்பில் நியமிக்கப்பட்டவர்களே. கணக்கெடுப்பில் பயிற்சியளிக்கப்பட்ட போதிலும், புள்ளியியல் முறைகளை அறிந்தவர் மிகச் சிலரே. செய்திகளைக் கேட்டுத் திரட்டும்போது, அவைகள் ஒரு புறச்சாய்வைப் பெற்றுள்ளனவா, அல்லவா என்பதை ஆராய்ந்தறியும் திறமை எல்லாக் கணிப்பாளர்களிடமும் எதிர்பார்க்க முடியாது. ஒரு சில கணிப்பாளர்கள் பட்டியலில் நேர்மையானதும் உண்மையானதுமான செய்திகளைப் பதிவு செய்வதற்குப்பதில், தவறான செய்திகளைப் பதிவு செய்ய சந்தர்ப்பமுள்ளது. கணிப்பாளர்கள் ஊதியமின்றி வேலைக்கு அமர்த்தப்படுவதால், மக்கட் கணக்கெடுப்பில் முழுக்கவனம் செலுத்தியுள்ளாரெனத் திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியாது.

3. மக்கட் கணிப்பின் உட்கருத்தினையும், பயன்களையும், மக்களனைவரும் உணர்வதில்லை. மக்கள் தெரிவிக்கும் செய்திகளெல்லாம் ரகசியமாக வைக்கப்படும் என்று உறுதிமொழி கூறினபோதிலும், மக்கட் கணிப்பில் ஐயுறுகிறார்கள். வயதைத் தெரிவிப்பதில் பல குறைகளுள்ளன. சிலருக்கு உண்மையாகவே அவர்களின் வயது தெரியாது. மற்றும் சிலர் தங்கள் வயதை முழு எண்களாகவே தெரிவிப்பார்கள். இன்னும் சிலர் தங்கள் உண்மையான வயதைச் சொன்னால் கூடிய சீக்கிரமே இவ்வுலகை விட்டுப்பிரியநேரிடுமென்ற மூடநம்பிக்கையால் தவறான வயதைத் தெரிவிக்கலாம். மணப்பருவமடைந்த பெண்கள் தங்கள் வயதினைச் சற்றுக் குறைத்துக் கூறுவர். மக்களின் அறியாமையே இவைகளுக்கு முக்கிய காரணமெனலாம்.

மக்கள் தங்கள் பொதுவாழ்வுக்குரிய நிலைமைகளை (civil condition) அறிவிப்பதில் தவறுகள் ஏற்படலாம். தங்களிடமுள்ள ஊனக் குறைகளை வெளிப்படுத்துவதற்குத் தயக்கம் கொண்டு அவைகளை முற்றிலும் மறைத்து விடுகிறார்கள்.

கணக்கெடுப்பின்போது மக்கள் இடத்திற்கிடம் செல்வதால், ஒரு சிலர் எண்ணிக்கையிடப்படாமலும், மற்றும் சிலர் இரு இடங்களிலும் எண்ணிக்கையிடப்படவும் நேரிடுகிறது.

எனவே, இக்குறைகளை நீக்க, பின்வருவனவற்றை வரையறுத்தல் வேண்டும்.

1. மக்கட் கணிப்பு ஒரு நாளில் எடுக்கப்பட வேண்டுமா அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட காலப் பகுதியில் எடுக்கப்பட வேண்டுமா என்பதைத் தீர்மானித்தல் வேண்டும்.

2. இடத்திற்கிடம் மாறும் மக்களைக் கணக்கெடுப்பதில் முன்னேற்பாடு செய்தல் வேண்டும்.

3. வினுப்பட்டியலிலுள்ள கேள்விகள், எல்லாத் தகவல்களையும் தெரிவிக்குமாறு, அமைக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும். செய்தித்தாள்களில் வினுப்பட்டியலைக் குறித்து, மக்கட் கணிப்பு எடுப்பதற்கு முன்கூட்டியே, விளம்பரப்படுத்த வேண்டும்.

4. கணிப்பாளர்கள் மக்கட் கணிப்பெடுத்தலில் பயிற்சி பெற்றவர்களாக இருக்கவேண்டும். பெண் கணிப்பாளர்களையும் சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டும்,

5. வேலைகளுக்குரிய (occupations) பாகுபாடுகள் தெளிவாகவும், போதுமான அளவு விரிவாகவும் இருக்கவேண்டும்.

பின்னிணைப்பு 1

BIBLIOGRAPHY

1. *Introduction to the Theory of Statistics*—by G. V. Yule and M. G. Kendall (Griffin).

2. *Mathematics of Statistics* (Vol. I)—by J. K. Kenney (Chapmann & Hall, Ltd).

3. *First Course in Statistics*—by Lindquest (Harrap).

4. *Statistics*—by L. H. C. Tippett (H.U.L.).

5. *Facts from Figures*—by M. J. Moroney (Pelican).

6. *Applied General Statistics*—by Croxton and Cowden (Pitman).

7. *Statistics for the Social Sciences*—by T. G. Connolly and W. Sluckin (Cleaver Hume).

8. *Statistics for Economists*—by R. G. D. Allen.

9. *Statistics*—by Robert Loveday (C.U.P.).

10. *Principles of Statistical Techniques*—by P. G. Moore, (C.U.P.).

11. *Dictionary of Statistical terms*—by M. G. Kendall and Buckland (Oliver and Boyd).

Reference List—Bibliography of Books in Statistics

(Consulted by the author while preparing the book)

1. *Introduction to the Theory of Statistics*—by G. V. Yule and M. G. Kendall (Griffin)—An excellant book having universal validity in its systematic treatment of the theory of statistics.

2. *Mathematics of Statistics*—by J. F. Kenney (Chapmann & Hall, Ltd.)—Vol. I—Recommended for reading to those who have a background of College mathematics.

3. *First Course in Statistics*—Lindquest (Harrap).

Chapter II—Frequency distributions—treatment is intended for students of Psychology and Education.

Chapter VIII—Sampling studies—A neat and compact account is presented.

Chapter X—Correlation Theory—Meaning of correlation, as an index of a measure of relationship between two linear variables; Computation, uses of correlation coefficients; Causal versus Casual relationship—these are explained clearly and systematically.

4. *Statistics*—L. H. C. Tippett, (H.U.L).

Chapter VI—Sampling—deals with (*a*) Population and Sample, (*b*) Sampling distribution of the mean, (*c*) Standard Error, (*d*) Bias in Sampling and (*e*) Defects of Sampling.

Chapter VIII—Statistical Laws—deals with the occurrence of regularity in the sampling items.

Chapter IX—Explains how Statistical reasoning gives accommodation to all types of reasoning—(empirical, Experimental and Scientific).

Chapter XI—This chapter deals with Statistics and other Sciences—Non-mathematics students will definitely appreciate how examples are given to testify the usefulness of Statistics to other branches of knowledge.

5. *Facts from Figures*—by M. J. Moroney (Pelican)

Chapter IV—On the Average—beautifully explains the concepts of the arithmetic mean, median and mode as measures of central tendency.

Chapter V—Measures of dispersion—provides a good account of the different measures of dispersion.

Chapter VI—Easy methods are given to evaluate the mean, median and mode and the different measures of dispersion.

Chapters VII, IX, X, XIII, XIV—Binomial and Normal distributions are dealt with mathematically. The necessity to take samples in describing the ideas connected with population, the confidence that we can refer on the sampling parameters as estimates of the population parameters are objectively explained.

6. *Applied General Statistics* — by Croxton and Cowden. (Pitman)

Chapters I and II—deal with Statistical data—collection—classification and tabulation.

Chapter XIV—The problem of the time series.

Chapter XV—The analysis of the time series—These two Chapters exhaustively give a readable account of the time series analysis. It is specially recommended above all others to the Commerce and Economics students.

Chapters XX, XXI—A very good account of the construction and uses of index numbers is given.

7. *Statistics for the Social Sciences*—by T. G. Connolly and W. Sluckin (Cleaver Hume).

The book explains in clear terms all the fundamental ideas that should be learnt by a beginner in statistics without the knowledge of higher mathematics.

8. *Statistics for Economists*—by R. G. D. Allen.

A good reference book for a beginner in applied statistics, especially with reference to the analysis of economic and time series data.

9. *Statistics*— by Robert Loveday (O.U.P)—An elementary book for a beginner.

10. *Principles of Statistical Techniques* —by P. G. Moore (O. U. P).—A reference book which may be perused after graphing the fundamental disciplines in statistical methods.

11. *Dictionary of Statistical Terms*—by M. G. Kendall and Buckland (Oliver and Boyd)—A very useful and authoritative reference book recommended for perusal by one and all.

பின்னிணைப்பு 2

பாடத்திட்டம்.

பாகம் III பி.ஏ. பட்டம்—தொகுதி B.

புள்ளியியல்

துணைப்பாடம் (IV, V, VI பிரிவுகளுக்குப் பொதுவானது)

(சூத்திரங்களைக் காணும் வழிகள் வேண்டற்பாலன).

வினாத்தாள்

1. புள்ளியியலைச் சார்ந்த வகைக் கணக்கின் நோக்கம்—புள்ளி விவரக் கணக்கின் இயல்புகள்—புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல்—மக்கட் கணிப்பு முறை—மாதிரிக் கூறு முறைகள்—வினாத்தாளின் பயன்கள்—புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கும் செயலாண்மை நிலையம்.

2. புள்ளி விவரப் பட்டியல்—பாகுபாடுகளும் அட்டவணையில் அமைக்கும் விதங்களும்—ஒன்று அல்லது மேற்பட்ட மாறிகளின் பட்டியல்கள்—அலைவுப் பரவலமைப்பு.

3. விளக்கப்பட மூலம் பிரதிபலித்தல்—வரை படங்கள்—கட்ட வரைபடம்—வட்ட விளக்கப் படம்—சிதறல் விளக்கப்படம்—அலைவெண் செவ்வகப் படம் — அலைவுப் பலகோணம்—அலைவெண் வளைகோடு—'ஒகைவ்' (குவிவு அலைவெண் வளைகோடு)—வரை படம், விளக்கப் படம்—இவைகளின் விளக்கவுரை.

4. மையநிலைப் போக்கு அளவுகோல்கள்—கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை—முகடு.

5. சிதறல் விளக்கங்களின் அளவுகோல்கள்—திட்ட விலக்கம்—கால்மான விலக்கம்—பத்துமானம்—மாறுபாட்டுக் கெழு.

6. பண்புகளின் கூட்டுறவு அல்லது இயைபு—உடன் தொடர்பு—தொடர்புக் கெழு—அதன் விளக்கவுரைகள்—மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் (ரெக்ரெஷன் கோடுகள்)—அவைகளை உபயோகிக்கும் வகைகள்.

7. ஊக அளவையின் துவக்க நிலைக் கருத்துகள்—இருபடி, இயல்நிலைப் பரவல்களின் விவரங்கள்—இப் பரவல்களின் முக்கியத்துவம்.

8. புள்ளியியலில் வரும் முழுமைத் தொகுதியின் பொதுக் கொள்கைகள்—ராண்டம் மாதிரிகள்—மாதிரிகளின் பாகுபாடுகள்—புள்ளியியல்புக் காரணங்களின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்—திட்டப் பிழைகள்—மாதிரி, ராண்டம் மாதிரி—இவைகளின் கூட்டுச் சராசரி, விகிதங்கள்—இவைகளின் திட்டப் பிழைகள்—விரிந்த மாதிரிகளின் மிகை, மிகையிலாத் தன்மையை ஆய்தல்.

9. அளவுக் குறியீட்டெண்—சிறந்த அளவுக் குறியீட்டெண்ணின் தன்மைகள்—அளவுக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும் வழிகளும், பயன்களும்— வாழ்க்கைத் தரவெண்மூலம் விவரித்தல்.

10. காலத் தொடர் வரிசை—அதன் போக்கு.

11. சோதனைக்குரிய திட்டங்கள்—'சாம்பிள் சர்வே' முறைகள்—அவைகளின் துவக்கக் கருத்துகள்.

BOOKS FOR REFERENCE :

1. Garrett, H.E.—Statistics in Psychology and Education.
2. Edward, Allen, L.—Statistical Analysis for students in Psychology and Education.
3. Connolly, T. G. and W. Sulckin — Statistics for the Social Sciences.
4. Yates, F–Sampling Methods for censuses and Surveys.
5. Allen, R. G. D.—Statistics for Economists.
6. Tippett, L.H.C.—Statistics (Home University Library Series).

பின்னிணைப்பு 3

புள்ளியியல்

அடிப்படைக் கருத்துகள்

1. Area Sampling—பரப்பு மாதிரித் தேர்வு

ஒரு முழுக் கணிப்பு விவரம் எளிதில் கிடைக்காத காலத்தில், இம் முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஆராய்ச்சி செய்வதற்கு மேற்கொண்ட மொத்தப் பரப்பளவை, சிறிய உட்பிரிவுகளாகப் பிரித்து, அவைகளில் சிலவற்றை 'ராண்டம்' (Random) முறையில் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொன்றையும் நன்ருக ஆராய்கிறோம்.

இச்சொல், ஒரு தானிய விளைச்சலின் நிலப்பரப்பைத் தீர்மானிப்பதற்காக அமைக்கப்படும் மாதிரித் தேர்வு என்ற பொருளிலும் கையாளப்பட்டு வருகிறது.

2. Arithmetic Mean—கூட்டுச் சராசரி

உறுப்புகளின் மதிப்புகளைக் கூட்டி, அதை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து வரும் அளவே கூட்டுச் சராசரியாகும். x-ன் n மதிப்புகள் $x_1, \; x_2, \ldots x_n$ ஆனல், அவைகளின் கூட்டுச்

$$\text{சராசரி} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} x_r.$$

3. Association—இயைபு

இச்சொல், இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பண்புக்குள்ள சார்பு அல்லது சார்பற்ற நிலையை விளக்குகிறது.

இரு பண்புகளை A, B என்று குறிப்போம். அவைகளுக்கு மாருன பண்புகளை a, β என்று குறிப்போம். '2×2' இணைப் பட்டியலில் a, b, c, d என்பன முறையே (AB); (aB); (Aβ); ($a\beta$) என்ற பண்புகளின் எண்ணிக்கைகளைக் குறிக்கட்டும்.

	A	a	மொத்தம்
B	a	b	$a+b$
β	C	d	$c+d$
மொத்தம்	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

(i) $ad-bc>0$ என்று வருமானல், A,B பண்புகள் 'நேர் இயைபுடையன' என்றும்,

(ii) $ad-bc<0$ ஆனல், 'எதிர் இயைபுடையன' என்றும்,

(iii) $ad-bc=0$ ஆனல், அவைகளை இயைபற்றதாகவும் கொள்கிறோம்.

4. Association, Coefficient of—இயைபுக் கெழு

இச்சொல், A, B என்ற இரு பண்புகள் எந்த அளவுக்கு இயைபுடையன என்பதைக் குறிக்கும். யூலின் (Yule) கருத்துப்படி, இயைபுக் கெழு$=\dfrac{ad-bc}{ad+bc}$ என்ற சூத்திரத்தைக் கொண்டு, இயைபை அளவிடலாம்.

5. Attribute — பண்பு

இச்சொல், ஒரு உறுப்பின் தனிப்பட்ட இயல்பை அளவிடக் கூடிய ஒரு மாறியின் தன்மையிலிருந்து பிரித்துக் காட்டுகிறது. மனித வர்க்கத்தில் இனம் (ஆண்பால், பெண்பால்) ஒரு பண்பாகவும், வயது என்பது அளவிடக்கூடிய ஒரு மாறியாகவும் உள்ளன. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளை, அவைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பைப் பெற்றுள்ளனவா அல்லது இல்லையா என்று இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

6. Bell-shaped curve—மணி வடிவமான வளைகோடு.

இச்சொல், ஒரு தொடர்ச்சி மாறியின் (continuous variable) சமச் சீரான அலைவெண் வளைகோட்டைக் குறிக்கிறது.

7. Binomial Distribution — ஈருறுப்புப் பரவல்

ஒரு முயற்சியில் ஏதாவதொரு நிகழ்ச்சி ஏற்படலாம், அல்லது ஏற்படாமலிருக்கலாம். நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்குரிய நிகழ்திற அளவை (probability), 'p'—எனக் கொண்டால், நிகழ்ச்சி ஏற்படாமலிருத்தலின் நிகழ்திற அளவை $= 1 - p = q$ ஆகிறது.

ஏதாவதொரு முயற்சியில் ஒரு நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதன் நிகழ்திற அளவு 'p' ஆனால், அந் நிகழ்ச்சி n சார்பிலா (independent) முயற்சிகளில், r தடவைகள் ஏற்படுவதன் நிகழ்கிற அளவு $(r)\, q^{n-r}.\, p^r$ ஆகிறது. r-க்கு 0, 1, 2, ... n மதிப்புகளை அளித்தலால் கிடைக்கும் நிகழ்திற அளவுகளை, $(q+p)^n$ஐ விரித்து எழுதுவதால் வரும் கோவைகள் கொடுக்கின்றன.

0, 1, 2......n என்ற n எண்களைப் பிரிவுக் குறிப்பெண்களாகவும், அவைகளுக்குகந்த நிகழ்திற அளவுகளைப் பிரிவு அலைவெண்களின் விகிதமாகவும் கொண்ட பரவலை, 'ஈருறுப்புப் பரவல்' என்று கூறுகிறோம்.

8. Birth - rate — பிறப்பு வீதம்

ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில், குறிப்பிட்ட பருவத்தில் (period) பிறக்கும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைக்கும், பருவகால நடுவில் மதிப்பிடப்படும் மக்களின் எண்ணிக்கைக்குமுள்ள விகிதத்தையே அவ்விடத்தின் பிறப்பு வீதமாகக் கொள்கிறோம். இவ்விகிதம், சாதாரணமாக 1000-ன் பாகமாக வெளியிடப்படுகிறது.

9. Census — முழுக்கணிப்பு, மக்கட் கணிப்பு

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளைப் பற்றிய விவரங்களைக் கணக்கெடுப்பதே முழுக் கணிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் : (i) மக்கட் கணிப்பு, (ii) நடைபாதை விபத்துகள் கணிப்பு (iii) உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் கணிப்பு முதலியவற்றில் முழுக் கணிப்பு விவரம் தயாரிக்கப்பட்டு வருகிறது.

10. Central tendency — மையநிலைப் போக்கு

அளவுக்குரிய ஒரு மாறியின் மதிப்புகளெல்லாம், மையத்தில மையும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவைச் சுற்றிலும் கூட்டமாக நெருங்கி அமையும் போக்கைத் தெரிவிக்கிறது. கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு முதலிய அளவுகள் மையநிலை இடத்தைத் தெரிவிக்கின்றன.

11. Chain index number — சங்கிலிக் குறியீட்டெண்

இது, ஒரு குறித்த பருவத்தில், ஒரு மாறி ஏற்கும் அளவுக்கும், அதற்கு முந்திய பருவத்தை அடிப்படையாகக்கொண்டு மாறி ஏற்கும் அளவுக்குமுள்ள விகிதத்தொடர்பை விளக்குகிறது. விகிதங்களில், பருவகாலங்கள் சங்கிலி கோத்தாற்போல் தொடர்ச்சியாக வருவதால், குறியீட்டெண்ணை, சங்கிலிக் குறியீட்டெண் என்று சொல்லுகிறோம்.

ஒரு குறித்த, நிலையான காலப் பருவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டும் குறியீட்டெண்ணை அமைக்கலாம்.

12. Class — பிரிவு.

Class - interval — பிரிவு இடைவெளி.

Class - boundary — பிரிவு வரம்பு.

Class - frequency — பிரிவு அலைவெண்.

ஒரு மாறியின் எல்லா மதிப்புகளையும், தகுந்த இடைவெளி கொண்ட பிரிவுகளின்மூலம் முறைப்படுத்தலாம். ஒரு பிரிவின் கீழ்,

மேல் எல்லைகளை நிர்ணயிக்கும் அளவுகள், பிரிவு வரம்புகளாகின்றன. இவ் வரம்புகளுக்குள்ள இடைத் தூரத்தைப் (தொலைவை) 'பிரிவு இடைவெளி' என்றும், அப் பிரிவில் அடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப், 'பிரிவு அலைவெண்' என்றும் கூறுகிறோம்.

13. Class - mark — **பிரிவுக் குறிப்பெண்**

இது, பிரிவு இடைவெளியின் நடு மதிப்பைக் குறிக்கிறது. பிரிவின் கீழ், மேல் வரம்புகளின் கூட்டுச் சராசரியே, 'பிரிவுக் குறிப்பெண்' எனப்படும்.

14. Class - symbol — **பிரிவுச் சின்னம்**

பண்புக் கொள்கை விளக்கங்களில் ஒரு பிரிவில் இருப்பவர், இல்லாதவர் என்பது எழுத்தால் குறிப்பிடப்படும்.

A, α; B, β என்பன முறையே ஆண், பெண் இனங்களையும் இருப்போர், இறந்தோர் இனங்களையும் குறித்தால், A B என்பது உயிருடனிருக்கும் ஆண்களையும், (AB) என்பது உயிருடனிருக்கும் ஆண்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன.

15. Confidence interval — **நம்பிக்கை இடைவெளி**

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஏதாவதொரு அளவு, அதற்குகந்த மாறியின் அளவை எவ்வளவு தூரம் நம்பிக்கையாக மதிப்பீடு செய்கிறதென்று, நிகழ்திற அளவைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்பட்டிருக்கும் இடைவெளியுடன் (with the range determined by probability) பெரும்பாலும் குறிப்பிடப்படுகிறது. இந்த இடைவெளியே, முழுமைத் தொகுதி அளவின் 'நம்பிக்கை இடைவெளி' ஆகும்.

16. Contingency — **இணைப்பு**

இச்சொல், இணைப் பட்டியலில் சிற்றறைகளில் (cells) உண்மையாக நிகழக்கூடிய அலைவெண்களுக்கும், கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.

17. Contingency table — **இணைப் பட்டியல்.**

A என்ற பண்பை A_1, A_2,......A_x என்ற உட்பிரிவுகளாகவும், B என்ற பண்பு B_1, B_2,......B_y என்ற உட்பிரிவுகளாவும் பிரித்து, அவைகளை முறையே கிடைவரிசையிலும், நிலைவரிசையிலும் அமைத்து '$x \times y$' சிற்றறைகள் கொண்ட பட்டியலைத் தயாரிக்கலாம். அதையே '$x \times y$' இணைப் பட்டியல் என்று கூறுகிறோம்.

18. Contingency, Coefficient of — இணைப்புக் கெழு

இது, A, B பண்புகள் இணைப்பை யுடையனவா, இணைப் பற்றவையா என்றும், இணைப்புடையனவாக இருக்குமாஞல், எந்த அளவுக்கு இணைப்பைப் பெற்றுள்ளன என்றும் நிர்ணயிக்கிறது. இக் கெழுவை $C = \sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}}$ என்ற சூத்திரத்தால் வரையறுக் கிரும்.

19. Correlation — உடன் தொடர்பு

இது, அளவின விவரங்களிலுள்ள தொடர்பை விளக்குகிறது.

20. Covariance - உடன் மாற்றம்

இது, இரு மாறிகளுக்குள் ஏற்படும் உடன் மாறுபாடுகளைத் தெரி விக்கிறது. x, y மாறிகள் (x_r, y_r), $r = 1, 2, \ldots\ldots n$ என்ற n ஜதை மதிப்புகளை ஏற்ருல், ஒவ்வொரு x_r, y_r மதிப்புகளும், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, $\bar{y}$-லிருந்து எவ்வளவு விலக்கப்பட்டிருக்கிறதோ, அதன் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுச் சராசரியே உடன்மாற்ற மாகும்.

$$\therefore \text{ உடன் மாற்றம் } = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x})\,(y_r - \bar{y})$$

21. Death rate — இறப்பு வீதம்

ஒரு குறித்த பருவ காலத்தில், இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கைக் கும், இருப்பவர்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதமே இறப்பு வீதமாகும். இதைச் சாதாரணமாக 1000-ன் பாகமாகக் கணக்கிடு கிரும்.

22. Decile — பத்துமானம்

ஒரு குழுவிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற வாறு, ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையிலமைத்து, பரவலைப் பத்து சம பாகங்களாகப் பிரித்து, அவ்விடங்களில் அமையும் உறுப்புகளின் மதிப்புகளை முறையே 1ஆவது, 2ஆவது, ... 9ஆவது பத்துமானம் என்று சொல்லுகிரும்.

23. Deviation, Absolute - வெறும் விலக்கம்

தோராய மதிப்பிற்கும், மாறியின் மதிப்பிற்குமுள்ள வித்தியாசம் சில சமயங்களில் '+ve' ஆ க வு ம், சில சமயங்களில் '—ve' ஆகவும் ஏற்படலாம். இந்த வேறுபாடுகளுக்குச் சம வாய்ப்பு அளிப் பதற்காக, அவைகளை வெறும் விலக்கங்களாகக் கருதுகிரும்.

உதாரணம் : 5-க்கும், 8-க்குமுள்ள வித்தியாசம் $= 5 - 8 = -3$. ஆனால், இவைகளுக்குள்ள வெறும் விலக்கம் $= |5-8| = 3$.

24. Deviation, Mean — **கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்**

இது ஒரு சிதறல் அளவாகும். இது ஒரு மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளுக்கும், அவைகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வெறும் விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் குறிக்கிறது.

$x_1, x_2, \ldots, {}_n x \bar{x}$ என்பன, x மாறியின் n மதிப்புகளையும், கூட்டுச் சராசரியையும் குறித்தால்,

$$\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \left| x_r - \bar{x} \right| .$$

25. Deviation, quartile — **கால்மான விலக்கம்**

இது ஒரு சிதறல் அளவாகும். N-அலைவெண்களைக் கொண்ட ஒரு பரவலில், உறுப்புகளை அவைகளின் மதிப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு, ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்தால் $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$, $\frac{3N}{4}$ ஆவது இடங்களில் அமையும் உறுப்புகளின் மதிப்புகள் முறையே, 'கீழ்க் கால்மானம்', 'இடைநிலை', 'மேல் கால்மானம்' ஆகும். Q_1, Q_3 என்பன முறையே கீழ்க் கால்மானம், மேல் கால்மானங்களைக் குறித்தால், $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பதே கால்மான விலக்கமாகும்.

26. Deviation, Standard — **திட்ட விலக்கம்**

இதுவும் ஒரு சிதறல் அளவாகும். உறுப்புகளின் மதிப்பிற்கும், அவைகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடுகளின் இருபடியைக் கணக்கிடவும். இவ்விரு படிகளின் கூட்டுச் சராசரியின் வர்க்க மூலமே திட்ட விலக்கமாகும். திட்ட விலக்கத்தை, 'σ' என்ற குறியால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$x_1, x_2, \ldots x_n, \bar{x}$ என்பன x-ன் n மதிப்புகளும், கூட்டுச் சராசரியுமானால்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x})^2}$$

27. Dispersion — **சிதறல்**

இது, ஒரு பரவலிலுள்ள உறுப்புகளின் மதிப்புகள் எவ்வாறு மையநிலைப் போக்கு அளவிலிருந்து விலக்கப்பட்டிருக்கின்றன என்பதைத் தெரிவிக்கிறது.

28. Distribution, Frequency — **அலைவெண் பரவல்**

கொடுத்திருக்கும் உறுப்புகளின் மதிப்புகளில் பெருமத்தையும் சிறுமத்தையும் கண்டு, அவற்றின் வேறுபாட்டிற்கேற்ப, பல பிரிவு இடைவெளிகளை அமைத்து, ஒவ்வொரு பிரிவில் அமையும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகளைக் காட்டுவதே அலைவெண் பரவலாகும்.

29. Distribution, Normal — **இயல்நிலைப் பரவல்**

இது, ஈருறுப்புப் பரவலின் இறுதிநிலையாக வரும் சமச்சீரான பரவல்.

30. Distribution, Poisson — **பாய்ஸானின் பரவல்**

இது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற பரவல். x மாறி 0, 1, 2...x, மதிப்புகளை ஏற்குமானல்,

$$\phi^{-\lambda},\ \phi,^{-\lambda}\ \frac{\lambda}{1!},\ \phi^{-\lambda}\ \frac{\lambda^2}{2!},\ldots\ \phi^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!}\ldots$$ என்பன

அவைகளுக்குகந்த வீத அலைவெண்களாகும்.

31. Frequency Polygon — **அலைவுப் பலகோணம்**

இது, பிரிவுக் குறிப்பெண்களைக் கிடை அச்சுத் தூரங்களாகவும் பிரிவு அலைவெண்களை நிலை அச்சுத்தூரங்களாகவும் கொண்ட புள்ளிகளை அடுத்தடுத்துச் சேர்த்து உண்டாகும் பலகோணத்தைக் குறிக்கிறது.

32. Frequency curve — **அலைவெண் வளைகோடு**

இது அலைவுப் பலகோணத்தில், பெரும்பாலான புள்ளிகளின் வழியாக வரைந்தால் ஏற்படும் பாதையைக் குறிக்கிறது.

33. Histogram — **அலைவெண் செவ்வகப் படம்**

செவ்வகப் பட்டைகளை உண்மைப் பிரிவு இடைவெளிகளின்மேல் ஒன்றுக்கொன்று நெருங்கி இருக்குமாறும், அவைகளின் உயரங்கள் பிரிவு அலைவெண்களுக் குகந்தவாறும் அமைத்து, உண்டாகும் படமே அலைவெண் செவ்வகப்படமாகும்.

34. Law of Statistical Regularity—**புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதி**

ஒரு வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, கணக்கியல் நிகழ்திறக் கோட்பாட்டின்படி, அதிக எண்ணிக்கைகள் அடங்கிய ஒரு 'ராண்டம்' மாதிரித் தேர்வு எடுக்கப்படுமானல், அம் மாதிரியிலுள்ள உறுப்புகள், மொத்தத்தில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும் என இச் சொல் அறிவிக்கிறது.

இதிலடங்கிய முக்கியக் கருத்துகள்

(i) முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் சம வாய்ப்பு அளித்து, மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

(ii) மாதிரிகளிலடங்கிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.

35. Law of Inertia of Large Numbers—**பேரினங்களின் மாறாப்பொதுமை**

இது, உறுப்புகள் முழுவதையும் ஆராயும்போது, அவைகளில் ஓர் ஒழுங்கு இருப்பதை விளக்குகிறது.

36. Least square method—**மிகக்குறைந்த வர்க்கமுறை**

உறுப்புகளில், நேரிடையாகக் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும், கணக்கியலாக எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாடுகளின் இருபடி வர்க்கங்களைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் கூடுதலை, மிகச் சிறியதாகச் செய்யும் முறையை, இச்சொல் குறிக்கிறது.

37. Mean—**கூட்டுச் சராசரி**

உறுப்புகளின் மதிப்புகளைக் கூட்டி, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து வருவதே கூட்டுச் சராசரியாகும்.

38. Median—**இடைநிலை**

உறுப்புகளை அவைகளின் மதிப்பிற்கு ஏற்றவாறு, ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைக்கும்போது, நடுமையத்திலமையும் உறுப்பின் மதிப்பு, இடைநிலையாகும்.

ஓர் அலைவெண் பரவலில், அலைவெண்களின் கூடுதல் N-ஆனல், குவிவு அலைவெண் $\frac{N}{2}$ ஆக அமையும் உறுப்பின் மதிப்பே இடைநிலையாகும்.

39. Mode—**முகடு**

உறுப்பு மதிப்புகளில், எந்த அளவு அதிக தடவைகள் ஏற்படுகிறதோ அந்த அளவே முகடாகும்.

40. Ogive—'**ஒகைவ்**'

இது, குவிவு அலைவெண் வளைகோட்டுப் படத்தைக் குறிக்கிறது.

41. Ogive, 'less than' '**கீழ் இன ஒகைவ்**'

Ogive, 'greater than'-'மேல் இன' ஒகைவ்

வரைபடத்தாளில், பிரிவு இடைவெளிகளின் மேல் வரம்புகளைக் கிடை அச்சுத் தூரங்களாகவும், குவிவு அலைவெண்களை நிலை அச்சுத் தூரங்களாகவும் கொண்ட புள்ளிகளில், பெரும்பாலானவைகளின் மேல் செல்லும்படி வரையப்படும் வளைகோடு, ‘ கீழ் இன ’ ஓகைவ் ஆகும். இம் மாதிரியே ‘ மேல் இன ’ ஓகைவையும் வரையலாம்.

42. Parameter—முழுமைத் தொகுதியின் அளவை

இது, புள்ளியியலில், அலைவுப் பரவல்களை வரையறுக்கும் கோவைகளில் (expressions) பெரும்பாலும் தோன்றுகிறது.

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முதலியன முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளாகும்.

43. Percentile—நூற்றுமானம்

ஓர் அலைவெண் பரவலை, 100 பாகங்கள் கொண்டதாகவும், ஒவ்வொரு பாகத்திலும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் அடங்கியிருக்கும்படியாகவும் பிரிப்பதே, நூற்றுமானமாகும்.

44. Pilot Survey—முன்னணிக் கணக்கெடுப்பு

இது, சிறப்பான ஒரு பெரிய மாதிரித் தேர்வு அமைப்பதற்கு முன், ஒரு சிறிய அளவில் தேர்வு அமைப்பதைக் குறிக்கிறது.

45. Population—முழுமைத் தொகுதி

இது, மக்கள் தொகையை மட்டுமல்லாமல், ஒருபடித்தான உறுப்புகள் கொண்ட கூட்டத்தையும் குறிக்கும்.

46. Population, hypothetical—கற்பனை முழுமைத் தொகுதி

இது, கற்பனையால் உருவாக்கப்பட்ட தொகுதியைக் குறிக்கிறது.

47. Population, real—மெய்யான முழுமைத் தொகுதி

இது, உண்மையான உறுப்புகளைக் கொண்ட தொகுதியைக் குறிக்கிறது.

48. Probability—நிகழ்திறம்

இது, நம்பிக்கைத் தரத்தை ஒருவாறு அளவிடுகிறது.

49. Random Sample—‘ ராண்டம் ’ மாதிரி

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் சம வாய்ப்பு அளித்து, ஒரு சில உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, உண்டாகும் மாதிரிக்கு ‘ ராண்டம் ’ மாதிரி என்று பெயர்.

50. Stratified Sampling—படுகை மாதிரித் தேர்வு

பலதரப்பட்ட உறுப்புகளை ஒரு முழுமைத் தொகுதி பெற்றிருந்தால், அந்தந்த உறுப்புகளின் பண்புகளுக்குத் தக்கவாறு படுகைகளை அமைத்து, ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஒரு 'ராண்டம்' மாதிரித் தேர்வு அமைப்பதையே 'படுகை மாதிரித் தேர்வு' என்று கூறுகிறோம்.

51. Double Sampling—இருபடி மாதிரித் தேர்வு

ஒரு சிறிய மாதிரியிலடங்கிய உறுப்புகளைச் சோதனைக்குட்படுத்தி, அதன் விளைவு சிறந்ததா, சிறப்பற்றதா என்று ஆராய்ந்து, முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளை ஏற்கிறோம்; அல்லது தள்ளுபடி செய்கிறோம். அதன் விளைவு இடைநிலை வகிப்பதாகில், மறுமுறையாக ஒரு மாதிரித் தேர்வு எடுத்து, அந்த இரண்டு மாதிரிகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியை ஏற்கவோ அல்லது தள்ளுபடி செய்யவோ முடிகிறது. இதற்கு, 'இருபடி மாதிரித் தேர்வு' என்று பெயர்.

52. Systematic Sampling—முறையுடை மாதிரித் தேர்வு

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, ஒரு மாதிரி எடுக்கும்போது, கையாளும் தேர்ச்சி முறையானது முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளின் பண்புகளிலிருந்து தனித்திருந்தால் (independent) அம் மாதிரித் தேர்வு, 'முறையுடை மாதிரித் தேர்வு' ஆகும்.

53. Skewness—கோட்டம்

சமச்சீராக அமையாத அலைவெண் பரவலின் போக்கைத் தெரிவிக்கிறது.

54. Statistics—புள்ளி விவரம்; புள்ளியியல்

இச்சொல், ஒரு முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி எண்களால் காட்டும் புள்ளி விவரத்தைக் குறிக்கிறது.

55. Variance—மாற்றம்

இது, திட்ட விலக்கத்தின் இருபடி வர்க்கமாகும்.

56. Variation, Coefficient—மாறுபாட்டுக் கெழு

இது, மாறியின் திட்ட விலக்கத்திற்கும், கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள விகிதத்தின் சதவீதமாகும்.

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100.$$

பின்னிணைப்பு 4

மூன்ருண்டுப் பட்டப் படிப்பு

B.A. பட்டத் தேர்வு—ஏப்ரல் 1959.

புள்ளியியல் (பொது அறிவு)

எவையேனும் மூன்றிற்கு விடை தருக.

(கேள்விகள் யாவும் ஒரே மதிப்பெண்களைப் பெறும். ஒழுங்கான முழுமையான விடைகள் சிறப்பு மதிப்பைப் பெறும்.)

1. இயற்கை நிகழ்ச்சிகளின்பாற்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளின் பண்புகளை அளந்தோ, எண்ணியோ கிடைக்கும் புள்ளி விவரங்களை அறிவியல் முறையில் கருதும் அறிவுத்துறைக்கு, 'புள்ளியியல்' என்று பெயர். இக் கூற்றினைத் தகுந்த எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

2. A, B என்ற இரு நகரங்களில் ஒரு சாதாரணத் தொழிலாளியின் வீட்டு மாதச் செலவுப்பட்டியல் இங்கே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தகுந்த விளக்கப் படங்களுடன் அவன் செலவு செய்யும் விதங்களை ஒப்பிடுக.

செலவினம்	செலவுத் தொகை (ரூபாயில்) A-நகரம்	B-நகரம்
உணவு	45	40
விறகு, விளக்கெரித்தல்	7	8
உடை	9	4
வீட்டு வாடகை ...	15	6
மற்றவை	24	17
மொத்தம் ...	100	75

3. மையநிலைப் போக்கைத் தெரிவிக்கும் அளவுகளான கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவைகளை ஒப்பிடுக. இவை மூன்றும் எப்போது ஒன்று சேரும் ?

4. ஒரு வகுப்புத் தேர்வில் நான்கு மாணவர்கள் மொழிப் பாடத்திலும், புள்ளியியல் துணைப் பாடத்திலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு :

மாணவன்	:	1	2	3	4
மொழிப் பாட மதிப்பெண்	:	40	20	20	40
புள்ளியியல் துணைப்பாட மதிப்பெண்	:	20	60	0	80

இவ் விவரங்களுக்குரிய உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு, அதன் விளைவை விவரி.

5. புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்தலில் மாதிரித் தேர்வு அளவெடுப்புகள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை விளக்குக.

செப்டம்பர், 1959.

1. விஞ்ஞானத் துறைகளில் புள்ளியியல் இன்றியமையாதது என்பதை விளக்க ஒரு சிறு குறிப்பு வரைக.

2. ஒரு பல்கலைக் கழகத் தேர்வில் 121 உறுப்பினர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அலைவுப் பரவலின் அட்டவணை பின்வருமாறு :

மதிப்பெண்கள்	உறுப்பினர்
35க்குக் கீழ்	21
35—45	24
45—50	32
50—55	12
55—60	10
60—65	8
65—75	9
75-ம் அதற்கு மேலும்...	5
மொத்தம் ...	121

இப் பரவலின் குவிவு அலைவெண் வளைகோட்டை வரைக. வரைபடமூலம் இடைநிலை, முகடு இவைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

3. 11 தொழிலாளர்களின் மாதக் கூலிகள் பின்வருமாறு :

46, 82, 59, 40, 55, 70, 86, 43, 70, 80, 62. இவைகளைக் கொண்டு, கூலிகளுக்குள்ள மாறுபாடுகளைத் திட்ட விலக்கம், கால்மான விலக்கம் என்ற சிதறல் அளவுகளால் ஒப்பிடுக.

4. 'ரெக்ரெஷன்' (regression) என்ற சொல்லின் பொருளைத் தந்து, மாதிரியில் இரண்டு 'ரெக்ரெஷன்' கோடுகள் இருக்க வேண்டியதின் அவசியத்தையும், அவற்றின் பயன்களையும் கூறுக.

5. உன் ஊரிலுள்ள மக்களில் எழுத்தறிவுள்ளவர்களைக் கணக்கிடுவதற்கு, நீ கையாளும் மாதிரித் தேர்வு முறையைச் சுருக்கமாக விவரி.

ஏப்ரல், 1960.

1. ஒரு புள்ளியியல் விசாரணை நடத்துவதில் கவனிக்க வேண்டிய முதல் நிலைகள் யாவை? புள்ளியியல் விசாரணையில் வினாத் தொகுதியை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஆராயும்போது, எந்தெந்தக் கருத்துகளுக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்கப்படவேண்டும்?

2. ஒரு கோட்டின் நீளத்தை 10 நபர்கள் அங்குலக் கணக்கில் அளந்ததில், கீழ்க்காணும் அளவுகள் கிடைத்தன: 4·9, 4·7, 4·8, 4·6, 4·7, 4·8, 4·7, 4·6, 4·5, 4·7. இவைகளை ஓர் அலைவெண் பரவல் அட்டவணையிலமைத்து, அதன் அலைவெண் பலகோணத்தை வரைக. இவ்வெண்களின் கூட்டுச் சராசரியையும் காண்க.

3. 'ஒரு பயிற்சியற்றவன் கையில், புள்ளியியல் முறைகள், விபரீதத்தை விளைவிக்கக்கூடிய கருவிகளாகின்றன.' இக் கூற்றை நீ ஒப்புக்கொள்கிருயா? உன் பதிலுக் கேற்ப, என்ன எடுத்துக் காட்டுகள் கூறுவாய்?

4. 'சிதறல் விளக்கப் படம்' என்ருலென்ன? 10 மனிதர்களின் எடை, உயர அளவுகளின் அட்டவணை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சிதறல் விளக்கப்படம் வரைந்து, உயரத்திற்கும் எடைக்கும் உடன் தொடர்பு உண்டா என்றும், அவைகள் எந்த அளவுக்கு உடன் தொடர்பைப் பெற்றுள்ளன வென்றும் தீர்மானிக்க.

மனிதர்கள் :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
உயரம் (அங்.) :	68	69	65	70	71	73	67	66	62	69
எடை (பவு.) :	140	180	165	190	170	195	145	140	155	180

5. சிதறலை விளக்கும் அளவுகளான கால்மான விலக்கம், திட்ட விலக்கம் இரண்டினையும் வரையறுத்து, ஒவ்வொன்றுக்குமுரிய சிறப்புகளைக் கூறுக.

செப்டம்பர், 1960.

1. செயலாய்வு முறையில் புள்ளியியலின் பங்கை விவரி.

2. பலவித வழிகளின் வாயிலாகக் கிடைக்கும் இரண்டு மாகாணங்களின் ஆண்டு வருமானத்தைப் (இலட்சம் ரூபாயில்) பின் வரும் பட்டியல் அறிவிக்கிறது. செய்திகளுக்குரிய வரைபடங்கள் வரைந்து, வருமானங்களின் வடிவமைப்பை ஒப்பிடுக.

தோற்றுவாய்	வருமானம் (இலட்சம் ரூபாயில்) மாகாணம்-A	மாகாணம்-B
நில வருமானம் ...	20	10
உள்நாட்டுப் பொருள் வரி	5	6
வருமானவரி ...	10	7
வணிகவரி ...	5	6
போக்குவரத்து ...	2	4
மற்றவை ...	8	2
மொத்தம் ...	50	35

3. 'புள்ளியியல்', 'புள்ளி விவரங்கள்'—இச் சொற்களுக்குள்ள வேறுபாடு யாது? ஏதாவதொரு புள்ளியியல் தேர்வாராய்வின் பொதுச் செயல் முறையை விளக்கு.

4. ஓர் அறிவுக்கூர்மை சோதனையில், 20 மாணவர்கள் பெற்ற பின்வரும் மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக :

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
30	4
40	5
50	6
60	3
70	2
மொத்தம்	20

5. மக்கட் கணிப்பு, மாதிரித் தேர்வுமுறைக் கணக்கெடுப்பு இவைகளைத் தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளைக்கொண்டு விளக்குக. இம் முறைகள் ஒவ்வொன்றும் எந்தெந்த நிலைமைகளில் பிறழ்கின்றன ?

ஏப்ரல், 1961.

1. புள்ளியியல் தேர்வாராய்வின் பொதுச் செயல் முறையானது,

(i) புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல்

(ii) அட்டவணையிலிடுதல்

(iii) பாகுபடுத்தல்

(iv) விளைவுகளை விவரித்துக் கூறல்—ஆகியவற்றிலடங்கியுள்ளது. இதனைக் ஆராய்க.

2. (i) புள்ளி விவரங்களை வரைபட, விளக்கப் படங்களாக வெளியிடுவதின் நோக்கத்தை விவரி.

(ii) பின்வரும் செய்திகளுக்குப் பொருத்தமான ஒரு விளக்கப் படம் வரைக.

ஓர் ஆண்டுக்கூலி (ரூபாய்)			வேலையிலீடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை
0— 99	...	...	10
100—199	...	...	54
200—299	...	...	184
300—399	...	...	264
400—499	...	...	146
500—599	...	...	40
600—699	...	...	1
700—799	...	...	1
மொத்தம்	...		700

3. மையநிலைப் போக்கு அளவைகளைக் கூறு. அவற்றில் ஏதேனும் மூன்றின் நன்மைகளையும் குறைபாடுகளையும் விவரி.

ஒரு குழுவிலுள்ள 13 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 76. மற்றொரு குழுவிலுள்ள 42 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 37. இவ்விரு குழுக்களிலுமுள்ள மொத்த மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

4. மாதிரி அளவெடுப்புக்களில் கையாளப்படும் வெவ்வேறான மாதிரித் தேர்வுகள் யாவை ?

உன் ஊரில் வீடுகள் அதிகரித்துக்கொண்டு வருவதைக் குறித்து, விசாரணை நடத்துவதற்குத் திட்டமிடச் சொன்னால், நீ சேகரிக்கவேண்டிய விவரங்களின் தன்மையையும், கையாளும் மாதிரித் தேர்வின் முறையையும், விவரங்களைத் திரட்டுவதற்கான செயல் முறையையும் விவரி.

5. பின்வருவனவற்றிவ் ஏதேனும் நான்கிற்குச் சிறு குறிப்பு வரைக.

(i) பண்புகளின் இயைபு.

(ii) ‘ ஒகைவ் ’ (Ogive).

(iii) சிதறல்.

(iv) உடன் தொடர்பு.

(v) மக்கட் கணிப்பு.

செப்டம்பர், 1961.

1. (i) 'புள்ளியியல், தொகுத்துப் பகுத்தறிவாராயும் அறிவியல்'. இதனை ஆராய்ந்திடுக.

(ii) பின்வரும் வாதத்தில் குற்றம் காண்க.

'கள் குடிப்போரில் 99 சதவீதம் 100 வயதையடைவதற்கு முன்பே இறந்துவிடுகிருர்கள். எனவே, கள் குடிப்பது நீண்டகால வாழ்வுக்குத் தடையாக உள்ளது'

2. (i) அலைவெண் வளைகோட்டுக்கும், 'ஓகைவ்' வளைகோட்டுக்குமுள்ள தொடர்பை விளக்குக. 'ஓகைவ்' வளைகோட்டின் பயன்களைக் குறிப்பிடுக.

(ii) ஒரு கல்லூரி விடுதியிலுள்ள 100 மாணவர்களின் வயது பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப் பரவலின் 'ஓகைவ்' வளைகோட்டை வரைந்து, அதன்பின் இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

வயது			அலைவெண் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
16—17	...	...	3
17—18	...	...	13
18—19	...	...	23
19—20	...	...	31
20—21	...	...	18
21—22	...	...	9
22—23	...	...	2
23—24	...	...	1
	மொத்தம்	...	100

3. புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் (i) முழுக் கணக்கெடுப்பு, (ii) மாதிரி அளவெடுப்பு ஆகியவற்றின் செயல் முறையை விளக்குக. இம் முறைகளின் நன்மை தீமைகளை ஆராய்ந்திடுக

4. (i) உடன் தொடர்பு என்றாலென்ன? 'நேரிடை உடன் தொடர்பு', 'எதிரிடை உடன் தொடர்பு' இவைகளைத் தகுந்த எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விவரி.

(ii) கீழ்வரும் பட்டியல் x, y மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளைக் கொடுக்கிறது x, y மாறிகளுக்குள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

x:	1	2	3	4	5
y:	5	4	3	2	1

5. பின்வருவனவற்றில் எவையேனும் நான்கிற்குச் சிறு குறிப்பு வரைக.

(i) பட்டை விளக்கப் படங்கள்.

(ii) மைய நிலைப் போக்கு.

(iii) கால்மான விலக்கம்.

(iv) அலகு (Parameter).

(v) இயைபு.

ஏப்ரல், 1962.

1. 'திறமையில்லாதவரின் கைகளில் புள்ளியியல் முறைகள் விபரீதத்தை விளைவிக்கக்கூடிய கருவிகளாகின்றன'—இக் கூற்றை ஆராய்க.

2. (i) அலைவெண் வளைகோட்டுக்கும், 'ஓகைவ்' வளைகோட்டுக்கும் உள்ள தொடர்பை விளக்குக. 'ஓகைவ்' வளைகோட்டின் பயன்களைக் குறிப்பிடுக.

(ii) இயந்திரத்தால் உண்டாக்கப்பட்ட பொருள்களின் அளவிடத்தக்க ஒரு பண்பின் அலைவெண் பரவல் அட்டவணை பின்வருமாறு:

x:	4·5	6·5	8·5	10·5	12·5	14·5
y:	3	16	35	33	11	2

'ஓகைவ்' வளைகோட்டை வரைந்து, அதிலிருந்து இடைநிலையையும், முகட்டையும் கண்டுபிடி.

3. சிதறல் என்றால் என்ன? வெவ்வேறான சிதறல் அளவு கோல்களின் சிறப்புகளைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

4. பாகுபாடு செய்வதில் மேற்கொள்ளவேண்டிய வெவ்வேறான வழிகளையும் முன்னேற்பாடுகளையும் விவரி.

சென்னை மாகாணத்தில் தனி மனிதருக்குரிய நிலச் சொத்துக்கு உச்சவரம்பை நிர்ணயிப்பதில், விசாரணை நடத்துவதற்கு ஒரு வினுப் பட்டியலைத் தயார் செய்க.

5. கீழ்க் கண்டவற்றில் ஏதேனும் மூன்றிற்குச் சிறுகுறிப்பு வரைக.

(i) மக்கட் கணிப்பும் மாதிரித் தேர்வு முறைகளும்.

(ii) மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்.

(iii) பண்புகள்.

(iv) சிதறல் விளக்கப்படம்.

செப்டம்பர், 1962.

1. 'ஒரு மரைக்குப் பொருந்துகின்ற திருகினைப் பொறுக்குவது மட்டுமல்ல புள்ளியியல் கருவிகள் பயன்படுத்தப்படுவது; எந்தத் திருகும் சரியாகப் பொருந்தாதபொழுது, ஒரே அளவினதாக நன்கு பொருந்துவதுபோல் தோன்றும் பல திருகுகளில் சரியான ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுப்பது எவ்வாறு என்பதற்கே புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.' புள்ளியியல் முறைகளின் குறைபாடுகளைத் தெளிவாக்கி இதனை விளக்குக.

2. 100 உறுப்புகளடங்கிய ஒரு தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே 30, 5·1 என்று கணக்கிடப்பட்டது. கணக்கிடும்போது ஓர் உறுப்பின் மதிப்பு 40 என்பதற்கு மாருக 50 எனக் கொள்ளப்பட்டது. இவ் வுறுப்பின் உண்மையான மதிப்பை மேற்கொண்டு தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

3, மாதிரிப் பிரதிமுறை (representative sample) என்ருல் என்ன ? பின்வரும் மாதிரித் தேர்வுச் செயல் நுட்பங்களில், இம் மாதிரிப் பிரதி முறையின் தத்துவம் எந்த அளவுக்கு மேற்கொள்ளப்படுகிறதென்பதை விளக்கு.

(i) சாதாரண ராண்டம் மாதிரித் தேர்வுமுறை (தேர்ந்தெடுத்த உறுப்புக்கு ஈடு செய்யாமலிருக்கும்போது).

(ii) படுகை மாதிரித் தேர்வு முறை.

(iii) பலபடி மாதிரி முறை.

(iv) முறையுடை மாதிரி முறை.

4. மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு (regression) என்றால் என்ன ? மாதிரியில் இரண்டு 'ரெக்ரெஷன்' கோடுகள் இருக்கவேண்டியதன் அவசியத்தையும், அவற்றின் பயன்களையும் கூறு.

5. எவையேனும் மூன்றிற்குச் சிறு குறிப்பு வரைக.

(i) முதனிலை, இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்.

(ii) வட்ட விளக்கப்படம்.

(iii) முகடு.

(iv) அலைவெண் பலகோணம்.

ஏப்ரல், 1963.

1. புள்ளி விவரங்களை வரைபட மூலம் விளக்குவதில் பல்வேறு முறைகளைக் குறிப்பிடுக.

ஒரு நகரத்தில் ஜூலை மாதத்திய மழை அளவின் அலைவுப் பரவலுக்குரிய செவ்வகப் படம் வரைந்து, அதில் அலைவெண் வளைகோட்டைப் பொருத்துக.

மழை அளவு (அங்குலத்தில்	0-7	8-15	16-23	24-31	32-39	40-47	48-55	56-63
அலைவெண் :	3	12	17	25	6	4	1	1

2. இந்தியாவில் மக்கட் கணிப்பு எடுப்பதில்,

(i) மக்கட் கணிப்பின் நோக்கம்,

(ii) செயலாண்மை,

(iii) புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறை,

(iv) சேகரிக்கும் விவரங்களின் தன்மை,

(v) விவரங்களைத் தொகுக்கும் முறை ஆகியவற்றைக் குறித்து ஒரு கட்டுரை வரைக.

3. சிதறல் விளக்கப்படம் என்றால் என்ன ? 10 மனிதர்களின் எடை, உயர அளவுகளின் அட்டவணை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சிதறல் விளக்கப்படம் வரைந்து, உயரத்திற்கும் எடைக்கும் உடன் தொடர்பு உண்டாவென்றும், அவைகள் எந்த அளவுக்கு உடன் தொடர்பைப் பெற்றுள்ளனவென்றும் தீர்மானிக்க.

உயரம் : (அங்.)	68	69	65	70	71	73	67	66	62	69
எடை : (பவு.)	140	180	165	190	170	195	145	140	155	180

4. சிதறலை விளக்கும் அளவுகளான கால்மான விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகிய இரண்டையும் வரையறுத்து, ஒவ்வொன்றுக்குமுரிய சிறப்புகளைக் கூறுக.

5. பின்வருவனவை யாவை? அவைகள் எப்போது பயன் படுத்தப்படும்?

(a) இருவழிப் பாகுபாடு அட்டவணை.

(b) இணைப் பட்டியல்.

(c) உடன் தொடர்புப் பட்டியல்.

இவை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையனவா? உடன் தொடர்புப் பட்டியலை எவ்வாறு வரைபடமூலம் அறிவிக்கலாம்?

மூன்றாண்டுப் பட்டப்படிப்பு

B. A. பட்டத்தேர்வு - ஏப்ரல் 1959

பாகம் III - தொகுதி B - துணைப்பாடம்

(IV, V, VII - பிரிவுகளுக்குப் பொது)

தொடக்கநிலைப் புள்ளியியல்

காலம்: 3 மணி] [பெருமம்: 100 மதிப்பெண்கள்]

எவையேனும் 5 வினாக்களுக்கு விடை தருக.

கேள்விகள் அனைத்தும் ஒரே மதிப்பெண்களைப் பெறும்.

1. பின்வரும் அட்டவணை 11 ஆண்டுகளில் உற்பத்தியான ஆப்பிள்களையும் அதன் விலையையும் குறிக்கிறது.

ஆண்டு	உற்பத்தி (மில்லியன் புஷல் களில்)	புஷல் ஒன்றுக்கு விலை (டாலர்களில்)
1936	194	3·44
1937	167	4·40
1938	170	5·94
1939	142	6·71
1940	224	4·02
1941	99	6·69
1942	203	4·84
1943	203	4·02
1944	172	4·78
1945	172	3·92
1946	247	3·22

ஒரே வரைபடத் தாளில் உற்பத்தி, விலை இவைகளுக்குரிய விளக்கப்படங்களை வரைந்து வரைபடமூலம் வலியுறுத்தப்பட்ட முக்கியத் தொடர்பைத் தெளிவாக்குக.

2. x, y மாறிகளின் ஜோடி மதிப்புகளை, $x = a + by$ என்ற சமன்பாடு அறிவிக்குமானால், x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றை, y மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தின் வாயிலாகக் காண்க.

நீளங்களை அங்குலத்தில் அளந்து அமைக்கப்பட்ட பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும், மாற்றமும் முறையே 28·2 அங்குலம், 16 அங்குலம் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அடி அளவுகோலைப் பயன்படுத்தும்போது, இவ்விரு மதிப்புகளும் எவ்வாறிருக்கும் ?

3. 'மிகக் குறைந்த வர்க்கமுறை' என்பதை விளக்கு. தகுந்த எடுத்துக்காட்டால் இதன் பயனைத் தெளிவாக்குக. இம் முறையைக் கையாண்டு, பின்வரும் விவரங்களின் போக்குக்குரிய ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

ஆண்டு	: 1929	1930	1931	1932	1933
காப்பீடு செய்யப்பட்டு வேலையிலீடுபடாதவரின் சதவீதம்	: 11·3	13·0	9·7	10·6	10·7

4. குறியீட்டெண்களின் கருத்தைத் தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளைக்கொண்டு விளக்குக. இவற்றைப் பயன்படுத்துவதாலுண்டாகும் வசதிகளை விவரி.

5. கனசதுரப்பகடை ஒன்றை 1,800 தடவைகள் உருட்டும்போது பக்கங்களில் ஒன்று அல்லது இரண்டு என்று இலக்கமிடப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் 365 தடவைகள் ஏற்பட்டன. இதனைக்கொண்டு, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவதொன்று நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{1}{3}$ என்றிருக்காது என்பதைப் பரிசோதித்துப் பார்க்க.

6. புள்ளியியல் விசாரணையில், மாதிரித் தேர்வு முறையின் நலன்களும் குறைபாடுகளும் எவை? தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு ஆராய்க.

7. சிறு குறிப்பு வரைக:

(*i*) மாறுபாட்டுக் கெழு.

(*ii*) காலத் தொடர்வரிசையின் போக்கு.

(*iii*) திட்டப் பிழை.

செப்டம்பர், 1959.

1. அமெரிக்க ஐக்கிய நாடுகளின் மக்கள் தொகையும், முந்தைய மக்கட் கணிப்பிற்கும் பிந்திய மக்கட் கணிப்பிற்குமுள்ள மிகுதிப் பாட்டின் சதவீதமும் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு வரிசைத் தொடர்களுக்குகந்த வரைபடம் வரைந்து, முக்கிய உண்மைகளை விளக்குக.

சென்ஸஸ் (ஆண்டு)	மக்கள்தொகை (1000-ல்)	மிகுதிப்பாட்டின் சதவீதம்
1830	128,66	33·5
1840	170,69	32·7
1850	231,92	35·9
1860	314,43	35·6
1870	385,58	26·6
1880	501,56	26·0
1890	629,48	25·5
1900	759,95	20·7
1910	919,72	21·0
1920	1,057,11	14·9
1930	1,227,25	16·1

2. m உறுப்புகளைக்கொண்ட ஒரு மாதிரியின் $m\ u$ மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியும் மாற்றமும், முறையே u, s_u^2 எனவும், n-உறுப்புகளைக் கொண்ட மற்றொரு மாதிரியின் nv மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியும் மாற்றமும், முறையே $\bar{v}$, s_v^2 எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு மாதிரிகளையும் ஒன்றுசேர்த்துண்டாகும் தொகுதியின்

(i) கூட்டுச் சராசரியை $\dfrac{m\bar{u}+n\bar{v}}{m+n}$ என்றும்

(ii) மாற்றத்தை $\dfrac{1}{m+n-1}\left[(m-1)s^2{}_u+(n-1)\,s^2{}_v+\dfrac{m\cdot n}{m+n}(\bar{u}-\bar{v}^2)\right]$

என்றும் நிரூபிக்க.

3. (i) சிதறல் விளக்கப் படம் என்றால் என்ன ? இரு மாறிகளுக்குள்ள உடன் தொடர்பை வெளிப்படுத்துவதில், இது எவ்வாறு பயன்படுத்தப்படுகிறது என்பதை விளக்குக.

(ii) கீழ்க்காணும் இரு தொடர் வரிசைகளுக்குள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

x :	5	7	9	11	13	15
y :	1·7	2·4	2·8	3·4	3·7	4·4

4. மூன்று ஒழுங்கான கனசதுர வடிவமுள்ள பகடைகளை ஒன்று சேர்த்து உருட்டும்போது, மேல்நோக்கி வரும் பக்கங்களில் தென்படும் பொட்டுகள் எண்ணப்பட்டன. இவ்வெண்ணிக்கைகளின் கூடுதல் 12 என்று வருவதற்குரிய ஊக அளவை யாது ?

5. வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் என்றால் என்ன ? இதைக் கணக்கிடுவதில் என்னென்ன முன்னேற்பாடுகள் செய்வாய் என்பதை விளக்கமாகக் கூறுக. இக் குறியீட்டெண்களின் நடைமுறைப் பயன்களைத் தெரிவி.

6. இந்தியாவில், சமீபத்தில் நடத்தப்பட்ட ஏதாவதொரு பெரிய மாதிரி அளவெடுப்பை விவரித்து ஆராய்க.

7. சிறு குறிப்பு வரைக :

(i) கோட்ட அளவைகள்

(ii) தனித்த நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றை யொன்று விலக்கிடு நிகழ்ச்சிகளும்.

(iii) மாதிரிப் பிழைகளும் மாதிரியிலாப் பிழைகளும்.

ஏப்ரல், 1960.

1. (i) புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் முழுக் கணிப்பு, மாதிரி அளவெடுப்பு ஆகியவற்றின் செயல் முறையை விளக்குக.

(ii) புள்ளியியல், 'புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதியின் கொள்கையை ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ளது' என்பதைச் சுருங்கக் கூறுக.

(iii) பின்வரும் செய்திகளில், எவ்விதப் புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதியை நீ காண்பாய் ?

(a) ஓராண்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட பருவ காலத்தில் நாள்தோறும் பதிவு செய்யப்பட்ட தட்ப, வெப்ப நிலையின் பெரும அளவுகள்.

(b) மருத்துவமனை ஒன்றில் ஆண்டுதோறும் பிறக்கும் ஆண், பெண் குழந்தைகளின் விவரப் பதிவு.

(iv) சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் எவ்வாறு தொகுக்கப்பட்டு, இயந்திரத் துறை வாயிலாக (Mcchanical) அட்டவணையிலிடப்படுகின்றன என்பதை விவரி.

2. பின்வரும் அட்டவணை, மாநகரொன்றில் முறைப்படி அமர்த்தப்பட்ட தொழிலாளர்களை (Regular employees), வந்து குடியேறியோர், முன்பே இருந்தவர்கள் எனப் பிரித்தறிவிக்கிறது.

ஆண்டு		முறைப்படி குடியேறியவர்கள்	அமர்த்தப்பட்டோர் முன்பே இருந்தவர்கள்
1946	...	5,103	9,325
1947	...	4,926	9,178
1948	...	3,085	8,829
1949	...	3,279	9,120
1950	...	3,493	9,644
1951	...	3,687	10,109
1952	...	4,023	10,151
1953	...	4,456	10,409
1954	...	4,725	10,614
1955	...	5,008	10,827
1956	...	5,341	10,982
1957	...	5,807	11,008

3. (i) ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்ந்த முழுமைத் தொகுதியை வரையறுக்க.

(ii) ஒரு நாணயத்தை 76 தடவைகள் சுண்டினதில் 32 தடவைகள் தலைகள் வந்தன. தலைகள் வருதலை, மொத்த முயற்சி களின் விகிதமாக் அமைத்து, அதற்குகந்த திட்டப்பிழையைப் பயன் படுத்தியும், இரண்டு திட்ட விலக்க விதியை (two standard diviative principle) மேற்கொண்டும் நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வற்றது என்று ஒத்துக் கொள்ளத்தக்கதா என்பதைப் பரிசோதி.

4. இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக. ஒரே வரைபடத் தாளில் பின் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குகந்த மூன்று இயல்நிலை வளைகோடுகளை வரைக.

1ஆவது வளைகோடு :	கூட்டுச் சராசரி = 0 ;	திட்டவிலக்கம் = 1
2ஆவது ,, :	,, = 2 ;	,, = 2
3ஆவது ,, :	,, = 2 ;	,, = 2

இவைகளுக்குள்ள வேற்றுமைகளை விவரி.

5. (சிறந்த) நல்ல குறியீட்டெண்களுக்குள்ள பண்புகள் யாவை? ஒரு குறிப்பிட்ட வகுப்பினரைச் சார்ந்தோருக்குகந்த வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுவதில் இடம்பெறும் பொருள்களின் வகைகளை விவரி.

6. வேலையின்மையை அறிவிக்கும் பின்வரும் விவரங்களுக் கேற்ப, ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துக.

ஆண்டு		தொழிலாளர் தொகுதியில் வேலையில்லாதோரின் சதவீதம்
1945	...	2·1
1946	...	2·2
1947	...	3·0
1948	...	5·1
1949	...	6·4
1950	...	6·7
1951	...	7·2
1952	...	7·9

1959ஆம் ஆண்டில் வேலையில்லாதோரின் சதவீதத்தை மதிப்பிடுக.

7. பின்வருவனவற்றில் எவையேனும் மூன்றிற்கு சிறு குறிப்பு வரைக.

(i) இடைக் கால்மான வீச்சு.

(ii) உடன் தொடர்புக் கெழு.

(iii) படுகை மாதிரிக் கூறு.

(iv) பண்புகளின் இயைபு.

செப்டம்பர், 1960.

1. மரக்கட்டைகளின் நீளங்கள் ஏறு வரிசையில் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

76, 79, 81, 86, 87, 89, 90, 91, 94, 96, 96, 96, 98, 99, 99, 99, 100, 100, 100, 100, 102, 103, 103, 105, 106, 109, 111, 112, 114.

இச் செய்திகளுக்குகந்த 'கீழ்இன' ஓகைவ் படம் வரைக. வரைபடத்திலிருந்து இடைநிலையையும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தையும் காண்க.

2. ஒரு மாறியைத் தரப்படுத்துதல் என்றால் என்ன? ஓர் ஒழுங்கு மாறியைத் தரப்படுத்துவதாலுண்டாகும் நன்மைகளைக் கூறுக.

பின்வரும் விவரங்கள், ஓர் ஒழுங்கு நிலையைப்பெற்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளனவா என்று ஆராய்க.

பிரிவு இடைவெளி		அலைவெண்
1— 3	...	2
4— 6	...	11
7— 9	...	27
10—12	...	33
13—15	...	19
16—18	...	9
19—21	...	4
22—24	...	1

3. (i) உடன் தொடர்புக் கெழுவுக்கும் பண்புகளின் இயைபுக்குமுள்ள வேறுபாடு யாது?

(ii) (x, y); (x_2, y_2); ....(x_{20}, y_{20}) என்பவை முறையே x, y மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட 20 ஜோடி விலக்க மதிப்புகளைக் குறிகின்றன. y-ன் திட்ட விலக்கம், x-ன் திட்ட விலக்கத்தின் நான்கு மடங்கு எனவும், x-ல், y-ன் ரெக்ரெஷன் கோட்டை $y = 3x$ எனவும் கொண்டால், x, y மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

(iii) சிதறல் விளக்கப்படம் எவ்வாறு மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைத் தெரிவிக்கும் என்பதை விளக்குக.

4. பின்வரும் அறிக்கை நமது அனுபவத்திற்கு எவ்வாறு இசைந்துள்ளது என்பதைக் கூறு.

ஒரு பகடை உண்மையானதா யிருக்குமானல், (ஒருபுறச் சாய்வற்றிருக்குமானல்) ஒரு வீச்சில் 6 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள பக்கம் வருவதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{1}{6}$ ஆகும்.

ஒருபுறச் சாய்வற்ற பகடையொன்று 15 தடவை உருட்டப்படுகிறது. 6 இலக்கத்தைக் கொண்ட பக்கம், மூன்றிற்கு மேற்படாமல் நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

5. (i) புள்ளியியல் கோட்பாடுகள் ஒரு தேர்வாராய்ச்சித் திட்டத்தை உருவாக்கும் விதத்தைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

(ii) விளைவுகளின் சரிநுட்பத் திறத்தை வெளிப்படுத்துவதில் திட்டப் பிழையின் பங்கை விவரி.

(iii) புள்ளியியல் ஆய்வு முறையில், ஒரு 'ராண்டம்' மாதிரியிலடங்கிய உறுப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய திட்டப் பிழையைக் காண்க.

6. உன் மாகாணத்தில் கைத்தறி நெசவின் பொருளாதார நிலையை யறிய, ஒரு மாதிரி அளவெடுப்பு நடத்தவேண்டி வருகிறது. அளவெடுப்புத் திட்டத்தில் மாதிரி அமைப்பு முறையிலிருந்து, அறிக்கையிடுவது வரையிலுமுள்ள கட்டங்களை நீ எவ்வாறு வகுத்துக் கொள்வாய் என்பதைச் சுருங்கக் கூறு.

அதற்காக, மாதிரி அமைப்பு முறை ஏற்படுவதிலிருந்து, இறுதியாக அறிக்கை வெளியிடுவதுவரை, அளவெடுப்பால் நீ அடைய விரும்பும் செய்திகளிலும், வினுப் பட்டியல்களின் அமைப்புகளிலுமுள்ள முக்கியக் கட்டங்களின் பல நிலைகளைச் சுருங்கக் கூறுக.

7. சிறு குறிப்பு வரைக:

(i) செவ்வகப்படம்

(ii) பொறித்துறையின் வாயிலாக அட்டவணைப் படுத்துதல்.

(iii) பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்.

(iv) 1951ஆம் ஆண்டின் இந்திய மக்கட் கணிப்பு.

ஏப்ரல், 1961.

1. வினுப் பட்டியல்களைப் பயன்படுத்தி புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறையின் முக்கியச் சிறப்பினை விளக்குக. இம் முறையிலுள்ள இடர்ப்பாடுகள் யாவை? அக் குறைகளை எந்த அளவுக்குச் சீர்படுத்த முடியும்?

2. புள்ளி விவரங்களைத் தொகுப்பதில், ஒரே சீரான பிரிவு இடைவெளிகளையும், சீரற்ற பிரிவு இடைவெளிகளையும் தனித்தனியே மேற்கொண்டு, அலைவெண் பரவலை அமைத்திடும் முறையினை விளக்குக. இவ்விரு வகைகளிலும், செவ்வகப் படங்கள் எவ்வாறு வரையப்படுகின்றன? தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் நீ கையாளும் முறையை விளக்குக.

3. (i) முக்கியமான மைய நிலைப் போக்கு அளவைகளைக் குறிப்பிட்டு, அவைகளுக்குள்ள நற்பண்புகளை ஆராய்க.

(ii) பின்வரும் உறுப்பு மதிப்புகளின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

7, 8, −2, 11, −2, 0, 22, 9, −1, 3, 6, 11, 19, 10, 3, −1, 7, 0, 17, 7, 12, 27, 18, 2, 5, 6, 16, 5, 4, 2, 24, 1, 14, 3, 13, 14, 16, 5.

இச் செய்திகளுக்குகந்த 'கீழ் இன' ஒகைவ் படம் வரைக.

4. இயல்நிலேப் பரவலேச் சார்ந்த ஒரு முழுமைத் தொகுதியி லுள்ள உறுப்புகளில் 30% 48-க்குக் குறைவான மதிப்புகளேயும் 10% 70-க்கு மேலான மதிப்புகளேயும் ஏற்ருல், அத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

5. லாஸ்பயர், பாஷே ஆகியோரின் குறியீட்டெண்களுக்குள்ள சிறப்புக் குணங்களே மதிப்பிடுக.

ஆண்டு		மதிப்பு (£ - மில்லியன் பவுனில்)	1930ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணக்கிடப் பட்ட மதிப்பு (£-மில் லியன் பவுனில்)
1930	...	1,044	1,044
1931	...	861	1,067
1932	...	702	939
1933	...	675	946
1934	...	731	991
1935	...	756	1,012
1936	...	848	1,077

6. மாதிரிப் பரவல் என்ருல் என்ன ? விரிந்த மாதிரிச் சோதனே களில் திட்டப் பிழையின் பங்கை விளக்குக.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 'ராண்டம்' முறையைக் கையாண்டு எடுக்கப்பட்ட 100 உறுப்பு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே 64·3 அங். 2·7 அங், என்ருல், முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியை 60 அங். என்று ஒத்துக்கொள்ளத் தக்கதா என்பதை ஆராய்க.

7. பின்வரும் ஏதேனும் மூன்றிற்கு சிறு குறிப்பு வரைக :

(i) ரெக்ரெஷன் கோடுகள்.

(ii) பருவகாலப் போக்கின் மாற்றங்கள்.

(iii) நாட்டுப்புறச் செல்வாக்கின் அளவெடுப்பு.

(iv) காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கு.

செப்டம்பர், 1961

1. (i) முதனிலை, 2ஆம் நிலை விவரங்களுக்குள்ள வேறுபாடுகளை ஆராய்க. ஏதாவதொரு விசாரணையில், இவ்விரு வகைப்பட்ட விவரங்கள் எவ்விதம் பயன்படுத்தப்படுகின்றன ?

(ii) மாறுபாட்டுக் கெழுவை வரையறுக்க. புள்ளியியல் பகுப்பாராய்ச்சியில் இதன் பயனை விளக்குக.

2. மாநகரொன்றில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சில தொழிலாளர் குடும்பங்களின் மாதச் சராசரி செலவுகள் (ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவைகளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், இடைக் கால்மான வீச்சு முதலியவற்றைக் கணக்கிடுக.

124·8, 136·2, 139·9, 79·1, 83·5, 115·5, 94·0, 152·3, 88·8, 96·1, 120·6, 129·7, 124·1, 108·2, 92·8, 133·5.

3. இரு மாறிகளுக்குள்ள உறவைச் சிதறல் விளக்கப் படம் எவ்வாறு அறிவிக்கிறது என்பதை விளக்குக. x-ல், y-ன் ரெக்ரெஷன் கோட்டைப் பின்வரும் செய்தியைக் கொண்டு வரையறுக்க.

x-ன் கூட்டுச் சராசரி	=	12·5
y-ன் ,, ,,	=	3·7
x-ன் திட்ட விலக்கம்	=	6·1
y-ன் ,, ,,	=	2·79
உடன் தொடர்புக் கெழு	=	0·4

$x = 18$ என்றால், y-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

4. (i) ஈருறுப்புப் பரவலின் முக்கியச் சிறப்புப் பண்புகளை விளக்குக.

(ii) ஒரு பையிலுள்ள ஆயிரம் ஒரு ரூபாய் நாணயங்களை ஒரு மேஜையின்மீது கொட்டும்போது, 472 நாணயங்களில் தலைகள் தென்பட்டன. ரூபாய் நாணயம் ஒருபுறச் சாய்வற்றதென்று கருதலாமா என்பதைப் பரிசோதித்துப் பார்.

5. (1) காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கை விவரி.

(2) காலத்தொடர் வரிசையின் போக்கு,

(i) நேர்கோட்டுச் சம்பந்தமானது

(ii) 'பாரபோலிக்' (Parapolic) வளை கோட்டால்,

(iii) 'லாஜிஸ்டிக்' வளைகோட்டால்

வரையறுக்கப்படுகிறது என்று எண்ணுவதற்குரிய நிலைகளை ஆராய்க.

ஏப்ரல், 1962.

1. (i) புள்ளி விவரங்களைப் பிரதிபலித்தலில் ஒரே சீரான பிரிவு இடைவெளிகள், சீரற்ற பிரிவு இடைவெளிகள் இவைகளை மேற்கொண்டு செவ்வகப் படம் வரைய முடியுமென்பதை விவரி.

(ii) ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலுக்குகந்த வரைபடத்தில் கீழ், மேல் பத்துமானங்களை எவ்வாறு தீர்மானிக்க முடியுமென்பதைக் காட்டு.

2. (i) எவ்வகைச் செய்திகளைப் பின்வரும் விளக்கப் படங்களால் காட்ட முடியுமென்பதை ஆராய்க :

(a) கட்ட விளக்கப் படங்கள்

(b) வட்ட விளக்கப் படங்கள்

(ii) இயந்திரப் பொறியின் வாயிலாக அட்டவணைப்படுத்துவதற்காகப் புள்ளி விவரங்களைத் தொகுக்கும் விதத்தை விவரி.

3. (i) பண்புகளின் இயைபுக்கும், மாறிகளின் தொடர்புக்குமுள்ள ஒற்றுமை, வேற்றுமையை ஒப்பிடுக.

(ii) ஒரு பொருளின் வருவாய்க்கும், அதன் விலைக்குமுள்ள தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக. கீழே பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	ஒரு மணங்கு விலை (ரூபாயில்)	வருவாய் (1000 மணங்குகளில்)
1947	22	27
1948	35	34
1949	23	32
1950	19	24
1951	33	33
1952	58	48
1953	31	29
1954	22	25
1955	29	29

உன் விளக்கக் குறிப்புகளைத் தருக.

4. (i) ஊக அளவை, ஈருறுப்புப் பரவல் இவற்றினை விளக்குக.

(ii) ஒரே மாதிரியான 8 நாணயங்கள் (ஒவ்வொன்றிலும் தலை வருவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{3}{5}$ என்று) சுண்டப்பட்டால், ஏதாவதிரண்டு நாணயங்களில் தலைகள் தென்படுவதற்குரிய ஊக அளவையைக் கணக்கிடுக.

5. (i) 'புள்ளியியல் எடுகோள்' என்றாலென்ன? திட்டப் பிழையைப் பயன்படுத்தி, விரிந்த மாதிரிகளில் எடுகோளானது எவ்வாறு சோதிக்கப்படுகிறது?

(ii) 50 தொழிலாளர்களடங்கிய பகுதியில், வாரக் கூலியின் கூட்டுச் சராசரி 35 ரூ. இப் பகுதியின் திட்ட விலக்கம் 5·2 ரூ. என்றால் கூட்டுச் சராசரிக் கூலியின் திட்டப் பிழையைக் கணக்கிடுக. அதே இடத்தில் 50 தொழிலாளர்களடங்கிய மற்றொரு 'ராண்டம்' மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரிக் கூலி, எந்த வீச்சு இடைவெளியில் நிகழும் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது?

6. (i) ஒரு குறிப்பிட்ட வகுப்பினருக்குரிய வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுவதில் ஏற்படும் நிலைமைகளை விவரி.

(ii) புதிதாக உறுப்புகளைச் சேர்த்துக் கொண்டும், அவைகளுக்கேற்ப எடைகளை நிர்ணயித்தும், ஒரு மாதிரி அளவெடுப்பு அமைக்கப்படும் முறையை விளக்குக.

7. சிறு குறிப்பு வரைக:

(i) ராண்டப்படுத்துதலும், மறு பகர்ப்புதலும் (Randomisation and Replication)

(ii) சிதறல் விளக்கப் படம்

(iii) நம்பிக்கை வைப்பதற்கும், கொள்கை மாறுமைக்கும் ஏற்ப விவரங்களைப் பரிசோதித்தல்

செப்டம்பர், 1962.

1. கீழ்க்காணும் அட்டவணை வயதிற்கேற்றவாறு பிரிக்கப்பட்ட மக்கட் தொகுதியை அறிவிக்கிறது.

வயதுபிரிவு (ஆண்டுகளில்)		மக்கள்தொகை (ஆயிரங்களில்)
0—4	...	3280
5—9	...	3500
10—19	...	7200
20—29	...	6640
30—39	...	5980
40—49	...	5240
50—59	...	3780
60—69	...	2440
70—79	...	1220
80-ம், அதற்கு மேலும்	...	320

இப்பரவலின் இடைநிலை, முகடு ஆகிய அளவுகளைக் கணக்கிடுக.

மேலும் இப்பரவலுக்குரிய 'மேலின' ஒகைவ் வளைகோட்டை வரைந்திடுக.

2. ஒரு கிராமத்திலுள்ள தாற்காலிகத்தொழிலாளர்களின் வேலையில்லாத் திண்டாட்டத்தின் வரம்பையும், அவர்களின் வருமானத்தையும் மதிப்பீடு செய்வதற்குரிய ஒரு மாதிரி அளவெடுப்புத் திட்டத்தை எவ்வாறு அமைப்பாய் ?

3. பகுப்பாராய்வின் அடிப்படைத் தத்துவத்தை விளக்குக.

x, y மாறிகள் $y = Ax^a$ என்ற சமன்பாட்டைத் தழுவுமானால், ஒரு நேர் கோட்டுச் சம்பந்தமான 'ரெக்ரெஷன்' பாகுபாட்டின் முறையைப் பயன்படுத்தி, A, a ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளில் 'ரெக்ரெஷன்' பாகுபாடுகளின் குறைபாடுகள் யாவை ?

4. (a) இயல் நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவத்தை விவரி.

(b) இரு நகரங்களில் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் மாதிரித் தேர்வின் மூலம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 1,600 நபர்களுக்குரிய இன விகிதங்கள் முறையே 0·51, 0·54. இவ்விரு மதிப்புகளுக்குள்ள வேற்றுமை குறிப்பிடத்தக்க அளவிலுள்ளதா எனக் காண்க.

5. (a) காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கை வரையறுக்க, இதனை வரைபட மூலம் தீர்மானிப்பதை விளக்குக.

(b) கீழ்வரும் விவரங்களின் போக்குக்குரிய ஒரு நேர் கோட்டினைப் பொருத்துக.

ஆண்டு			செலாவணிமுறி (note - issue)
1933-34	...	...	177
1934-35	...	...	186
1935-36	...	...	196
1936-37	...	...	208
1937-38	...	...	215
1938-39	...	...	208
1939-40	...	...	252
1940-41	...	...	270
1941-42	...	...	421
1942-43	...	...	650

1944-45 ஆண்டுக்குரிய போக்கின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

6. (a) சிறந்த குறியீட்டெண்ணுக்குள்ள பண்புகளை விளக்குக. 'பாஷே'யின் குறியீட்டெண் எந்த அளவுக்குத் திருப்திகரமானது என்பதை ஆராய்ந்திடுக.

(b) இரு தனி இடங்களில், சரிநிகரான பண்புகளையுடைய குறியீட்டெண்களை ஒப்பிட முடியுமா வென்பதை ஆராய்ந்திடுக.

7. சிறு குறிப்பு வரைக.

(i) மாறுபாட்டுக் கெழு.

(ii) புள்ளியியல் ஆய்வு முறை.

(iii) பண்புகளின் இயைபு.

ஏப்ரல், 1963.

1. தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளை அமைத்துக் கீழ்க்காணும் விவரங்களைத் தொகுத்து, அதற்குரிய அலைவெண் பல கோணத்தை வரைக. விளக்கப் படத்தில் முக்கிய மையநிலைப் போக்கு அளவை களைக் காட்டுக.

13	45	22	13	49	24	23	30	27	24	17	12	42	47	30
37	29	46	35	30	33	36	34	36	25	30	31	30	23	30
36	26	14	30	35	53	43	42	25	25	43	17	24	34	16
40	22	19	18	18	35	39	28	32	36	26	20	21	32	28
33	33	27	38	38	21	39	21	42	31	18	33	41	27	19
41	28	29	31	26	29	31	29	27	31	31	41	33	30	29

2. (a) முழுக் கணக்கெடுப்பு, மாதிரி அளவெடுப்பு இவைகளுக்குள்ள சிறப்புக் குணங்களை ஒப்பிடுக.

(b) செயலாய்வுக்குரிய கோட்பாடுகளை விவரி. ஒரு விசாரணை அளவெடுப்புத் திட்டத்தில் இவைகளின் முக்கியத்துவத்தைத் தெளிவாக்குக.

3. நேர்கோட்டுச் சம்பந்தமான 'ரெக்ரெஷன்' பகுப்பாய்வில் மேற்கொள்பவைகள் (assumptions) யாவை? இரு மாறிகளுக்கேற்ப நிறுவப்படும் இரண்டு 'ரெக்ரெஷன்' நேர்கோடுகளுக்குள்ள வேற்றுமையை விளக்குக.

கீழ்க்காணும் பட்டியல் 8 பண்ணைகளின் செலாவணி, வருவாய் ஆகிய விவரங்களை அறிவிக்கிறது.

செலாவணி (x) :	11	14	16	22	30	40	60	65
வருவாய் (y) :	21	25	31	39	43	47	51	52

x-ல், y-ன் 'ரெக்ரெஷன்' கோட்டை வரையறுக்க. செலாவணி (x) 8 ஆக வரும்போது, வருவாயை (y) மதிப்பிடுக.

4. (a) கீழ்க்காணும் இயல்நிலைப் பரவல்களுக்குகந்த அலைவெண் வளைகோடுகளை ஒரே வரைபடத்தாளில் வரைக.

		கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
(i)	...	2	1
(ii)	...	1	2
(iii)	...	0	1
(iv)	...	−1	1

(b) ஒழுங்கு அலைவெண் வளைகோட்டுக்குகந்த ஊக அளவைப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி, ஈருறுப்புப் பரவலுக்கேற்ற ஊக அளவுகளைத் தோராயமாகக் கணக்கிடும் விதத்தை விளக்குக.

5. (a) பொருளாதாரக் காலத் தொடர் வரிசையின் முக்கியப் பண்புகள் யாவை? இதில் புள்ளியியல் அனுமானத்தை யடையும் போது ஏற்படும் சிக்கல்களை விளக்குக.

(b) நகரும் சராசரி முறையினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க் காணும் விவரங்களுக்குரிய போக்கைக் காண்க. மீதிப் பிழையை (residual error) அட்டவணையிலமைக்க.

ஆண்டு	பகுதி (அல்லது பருவம்)	மிளகு விற்பனையின் அளவு
1948	I	34
	II	31
	III	29
	IV	36
1949	I	40
	II	38
	III	35
	IV	43
1950	I	39
	II	39
	III	37
	IV	47
1951	I	46
	II	41
	III	45
	IV	49

6. (a) வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணை வரையறுக்க. இக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுவதில் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட விசாரணை எங்ஙனம் முக்கியத்துவம் பெறுகிறது ?

(b) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட மாதிரித் தேர்வாராய்ச்சிக்குரிய இரு முக்கிய முறைகளை விவரி. இம் முறைகளின் நற்பண்புகளை விளக்குக.

7. சிறு குறிப்பு வரைக :

(i) உடன் தொடர்புக் கெழு.

(ii) விரிந்த மாதிரிகளின் மிகை, மிகையிலாத் தன்மையை ஆய்தல்.

(iii) புள்ளியியலின் தற்சார்பு.

பின்னிணைப்பு 5

கலைசொற்கள் அகரவரிசை

தமிழ்—ஆங்கிலம்

அ

அச்சுகள் — Axis
அடிப்படை ஆண்டு — Base year
அட்டவணை — Table
ஆயுள் அட்டவணை — Life Table
அரசாங்கப் புள்ளி விவரம் — Statistics, Official
அலகு — Unit
அலைவு — Oscillation
அலைவெண் — Frequency
அலைவெண், குவிவு வளைகோடு — Cumulative frequency curve
அலைவெண் செவ்வகப்படம் — Histogram
அலைவெண், திரள் — Cumulative frequency
அலைவுப் பரவல் — Frequency distribution
அலைவுப் பலகோணம் — Cumulative frequency polygon
அலைவெண் வளைகோடு — Frequency curve
அலைவெண் விளக்கப்படம் — Frequency graph
அளவின விவரங்கள் — Quantitative data
அளவுக் குறியீடு — Index
அளவெடுப்பு — Survey
அறிவியல் ஆய்வு முறைகள் — Scientific Methods of Reasoning
அனுபவ ஊக அளவை — Empirical Probability

ஆ

ஆய்வு — Reasoning
ஆய்வாளர் — Investigator

இ

இடைக் கால்மான வீச்சு — Semi Inter quartile range
இடைநிலை — Median

இடைநிலைப் பிரிவு — Median class
இணைப்பு — Contingency
இணைப்புக் கெழு — Coefficient of contingency
இணைப்பட்டியல் — Contingency table
இடைவெளி — Interval
பிரிவு — Class interval
பிரிவுத்தூரம் — Width of a class interval
இயல்நிலை ஊக அளவை வளைகோடு — Normal probability curve
இயல்நிலைப் பரவல் — Normal distribution
இயல்நிலைப்பிழை வளைகோடு — Normal curve of error
இயல்நிலை வளைகோடு — Normal curve
இயைபிலா — Random
இயைபிலாக்கூறு, மாதிரிக்கூறு — Random sampling
இரண்டாம்நிலை விவரங்கள் — Secondary data
இல்லெனும் எடுகோள் — Null hypothesis
இறங்கு வரிசை — Decreasing order
இறப்பு வீதம் — Death or Mortality rate

ஈ

ஈர்ப்புத்தானம் — Centre of gravity
ஈருறுப்பு — Binomial
ஈருறுப்புப் பரவல் — Binomial distribution

உ

உடன் தொடர்பு — Correlation
உடன் தொடர்புக் கெழு — Correlation coefficient
உடன் மாறுபாடு — Covariation
உடன் மாற்றம் — Covariance
உண்மையான பிரிவு இடைவெளி — True class interval
உருவப்படம் — Pictogram
உறுப்பு — Item
உறுப்பு மாற்றுக் கோவைகள் — Permutations

ஊ

ஊகம் — Probable
ஊக அளவை — Probability

ஊக அளவு அடர்த்தி — Probability density
ஊக அளவையின் கூட்டு நியதி — Addition theorem of probability
ஊக அளவையின் பெருக்கு நியதி — Multiplication theorem of probabiltty
ஊகப்பிழை — Probable error

எ

எடுகோள் — Hypothesis
எடை எடுத்தல் — Weighting
எதிரிடைத் தொடர்பு — Inverse correlation or negative correlation
எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு — Expected value
எதிர்பார்க்கும் ஆயுள் — Expectation of life
எப்ரியோரி ஊக அளவை — Apriori probability
எல்லையற்ற — Unlimited

ஏ

ஏறக்குறைய — Approximate
ஏறு வரிசை — Increasing order
ஏற்றத் தாழ்வுகள் — Deviations or fluctuations

ஒ

ஒகைவ் — Ogive
ஒரு சிறைத் தொடர்பு — Partial correlation
ஒரு தலையான கூட்டுறவு — Partial association
ஒருபடித்தான — Homogeneous
ஒருபுறச் சாய்வு — Bias
ஒருபுற மாறிகள் — Biased variables
ஒரு மாறி — Single variable or variate
ஒரு முகட்டு — Unimodal
ஒரே சீராக — Symmetrical
ஒருவழிப் பாகுபாடு — One way classification
ஒழுங்கான அளவை — Normal measure
ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள் — Normal equations
ஒழுங்கு அலைவெண் பரவல் — Normal distribution
ஒழுங்கு வளைகோடு — Normal curve

ஒற்றை — Odd
ஒன்றை ஒன்று விலக்கும்
தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள் — Mutual exclusive events

க

கணக்கிடுதல் — Evaluation
கணக்கியல் அளவை — Mathematical measure
கணக்கெடுப்பு — Enquiry, Survey
கண்டறிதல் — Observation
கண்டறிந்த விவரங்கள் — Observed data
கணிப்பாளர் — Enumerator
களக் கணக்கெடுப்புச் சோதனை — Field experimentation
கள முறை — Field method
கள விசாரணை — Field enquiry
காரணம் — Cause
காரணத் தொடர்பு — Causal relationship
காரண விளைவுத் தொடர்பு — Cause and effect relationship
காரணி — Factor
காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனை — Factor reversal test
காலத் திருப்புச் சோதனை — Time reversal test
காலத் தொடர் வரிசை — Time series
கால்டனின் ஒகைவ் — Galton's ogive
கால்மான வீச்சு — Quartile range
கால்மான விலக்கம் — Quartile deviation
கிடை — Horizontal
கிடைக்கோடு — Horizontal line
கீழினத்திரள் அலைவெண் பரவல் — Cumulative frequency distribution of the less than type
கீழின ஒகைவ் — Less than ogive
கீழ்க் கால்மானம் — Lower quartile
கீழ் நம்பிக்கை எல்லை — Lower confidence limit
குடிக் கணக்கு — Census
குவிவு — Cumulative
குவிவு அலைவெண் — Cumulative frequency
குவிவுப் பரவல் — Cumulative distribution
குவிவு வளைகோடு — Cumulative curve
குறியீடு — Index
குறியீட்டெண்கள் — Index numbers
குறைந்த வர்க்க முறை — Least square method

கூட்டுச் சராசரி, கூட்டிடை — Arithmetic Mean
கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் — Compound events
கூட்டுப் பட்டை விளக்கப்படம் — Compound bar diagram
கூட்டுறவு — Association
கூட்டுறவுக் கெழு — Coefficient of association
கூறின் அளவை — Statistic
கூறெடுத்தல் முறைகள் — Sampling methods
கெழு — Coefficient
'கை' இருபடி வர்க்கம் — X^2
'கை' வர்க்க சோதனை — X^2-Test
கோட்டம் — Skewness
கோட்ட அளவைகள் — Measures of skewness
கோட்டக் கெழு — Coefficient of skewness
கோட்டு விளக்கப்படம் — Line diagram

சங்கிலி அடிப்படை முறை — Chain base method
சங்கிலிக் குறியீட்டெண் — Chain index number
சங்கிலிச் சார்பிகள் — Chain relatives
சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம் — Percentage bar diagram
சராசரி — Average
சராசரி விலக்கம் — Average deviation
சரிபார்க்கும் குறி — Tally mark
சமச்சீராக — Symmetrical
சாதக நிகழ்ச்சி — Favourable event
சார்பிகள் — Relatives
சார்பிலா — Independent
சார்பிலா நிகழ்ச்சி — Independent event
சார்பு நிகழ்ச்சி — Dependent event
சிதறல் — Dispersion or Scatter
சிதறல் கெழு — Coefficient of dispersion
சிதறல் அளவைகள், சிதறல் அளவு கோல்கள் — Measures of dispersion
சிதறல் விளக்கப்படம் — Scatter diagram
சித்திர விளக்கப் படங்கள் — Pictograms
சிறப்புக்காணும் சோதனை — Test of significance
சிறுமம் — Minimum
சீரான பரவல் — Symmetrical distribution

சீரிலாப் பரவல்	— Unsymmetrical distribution or skewed distribution
சீரின்மை	— Unsymmetrical
சுழற்சி	— Cycle
சுழல் ஏற்ற விறக்கம்	— Cyclical fluctuations
சுழல் மாறுபாடுகள்	— Cyclical variations
செய்முறை	— Procedure

த

தரம்	— Class
தரப்படுத்துதல்	— Classification
தரப்படுத்து	— Classify
தரப்பிழை	— Class error
தற்போதைய ஆண்டு	— Base period
தனித்த	— Discrete
தனித்த மாறிகள்	— Discrete variables
திட்டப் பிழை	— Standard error
திட்ட விலக்கம்	— Standard deviation
திரள்	— Cumulative
திரள் அலைவெண்	— Cumulative frequency
திரள் அலைவெண் பலகோணம்	— Cumulative frequency polygon
திரள் அலைவெண் வளைகோடு	— Cumulative frequency curve
தேசீய மாதிரி அளவெடுப்பு	— National Sample Survey
தொகுத்தறி முறை	— Inductive method
தொடர்ச்சி	— Continuous
தொடர்புக் கெழு	— Correlation coefficient
தொடர்புக் கோடுகள்	— Regression lines
தொடர்புச் சமன்பாடுகள்	— Regression equations
தொடர்புப் பட்டியல்	— Correlation table
தொடர்பு மாறி	— Continuous variable
தொடர்பிலா மாறி	— Discontinuous variable
தொடர் விகிதம்	— Correlation ratio
தொழிலில் சுழன்று வரும் நிகழ்ச்சிகள்	— Business cycle events
தோராய மதிப்பீடு	— Approximate estimation
தோற்றுவாய்	— Source

ந

நகரும் சராசரி	— Moving average
நகரும் மொத்தம்	— Moving total

நடைமுறை — Real or existent population
நம்பகக் கெழு — Reliable coefficient
நம்பிக்கை எல்லை — Confidence limits
நாட்டு வருமானம் — National income
நிகழ்ச்சி — Event
நிகழ் பிழை — Probable error
நிலைக்கோடு — Ordinate
நிலையான முழுமைத் தொகுதி — Normal population
நிறையிட்ட குறியீட்டெண் — Weighted arithmetic mean
நிறையிட்ட சராசரி — Weighted average
நிறையிட்ட விலைச்சார்புக் குறியீட்டெண் — Weighted index number of price relatives
நூற்றுமானம் — Percentile
நேரிடைத் தொடர்பு — Direct or positive correlation
நேர்கோட்டம் — Positive skewness
நேர்கோட்டுச் சம்பந்தமான போக்கு — Linear trend
நேர்கோட்டு மாறிகள் தொடர்பு — Correlation of linear dependent variables

ப

பகடை — Die
பகுப்பு — Factor
பகுப்பாய்வு முறை — Factorial method
பகுதித் திருப்பச் சோதனை — Factorial experiment
பட்டியலமை — Tabulation
படிமாற்றுதல் — Stratify
படுகை மாதிரி முறை — Stratified sampling method
பட்டை விளக்கப் படம் — Bar diagram
பட்டறி முறை — Empirical method
பண்பு — Attribute
பண்புகளின் கூட்டுறவு — Association of attributes
பண்புகளின் சார்புத் தன்மை — Positive association of attributes
பண்புகளின் சார்பிலாத் தன்மை — Negative association of attributes
பண்பாட்டு மாதிரித் தேர்வு — Sampling method of attribute
பண்பின் விவரங்கள் — Qualitative data
பதிலின்மை — Non response

பதிவு செய்தல் — Registration
பத்துமானம் — Decile
பயன்தரு எடுகோள் — Hypothesis
பரவல் — Distribution
பருவகாலம் — Period or season
பருவகால ஏற்றத் தாழ்வு — Seasonal variation or fluctuation
பலபடி மாதிரி முறை — Multiple sampling
பலபடித்தான — Heterogeneous
பல்தரத் தொடர்பு — Multiple correlation
பல்முகட்டு — Multimodal
பல்மாறி — Multivariate
பாகுபாடு — Classification
பாய்ஸான் பரவல் — Poisson distribution
பியர்ஸனின் சராசரி இணைப்புக் கெழு — Pearson's coefficient of mean square contingency
பிரிவு — Class
பிரிவுக் குறிப்பெண் — Class mark
பிரிவின் நடுமதிப்பு — Mid value of a class
பிரிவு செய் — Classify
பிரிவு அலைவு — Class frequency
பிரிவு இடைவெளி — Class interval
பிரிவு எல்லை — Class limits
பிழை — Error
பிழைகளின் விதிகள் — Laws of errors
புள்ளிமுறை — Statistical
புள்ளியியல் — Statistics
புள்ளியியல் கருத்துமுறை — Statistical reasoning
புள்ளி விவர அளவைகள் — Statistical measures
புள்ளி விவர ஆய்வாளர் — Statistical Investigator
புள்ளி விவரக் குறுக்கம் — Reduction of statistical data
புள்ளி விவரத் தொகுப்பு — Statistical codification
புள்ளி விவர ஒழுங்கு நியதி — Law of Statistical regularity
புள்ளி விவர விளக்கப் படம் — Statistical diagram
பெருக்குச் சராசரி — Geometric mean
பெருமம் — Maximum
பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை — Inertia of large numbers
பேரினங்களின் விதி — Law of large numbers
பொதுவான போக்கு — Normal trend

பொது விசாரணை — Public enquiry
பொருளாதாரப் புள்ளியியல் — Economics, Statistical
பொருளில்லாத் தொடர்பு — Nonsense correlation
போக்கு — Trend
போலித் தொடர்பு — Spurious correlation

ம

மக்கள் மதிப்பீடு — Population estimate
மதிப்பிடு — Estimate
மதிப்பீடு — Estimation
மதிப்பளவை — Estimated value
மதிப்புக் குறியீடு — Index of estimation
மதிப்புத்தரத் தொடர்புக் கெழு — Estimated correlation coefficient
மத்தியப் புள்ளி ஆய்வுக் கழகம் — Central Statistical Organisation
மறுக்கத்தகு எடுகோள் — Null hypothesis
மறைமுகமான — Indirect
மறைமுக முறை — Indirect method
மாதிரிகள் — Samples
மாதிரிச் சராசரி — Sampling average
மாதிரித் தேர்வின் பிழை — Sampling error
மாதிரியின் அளவை — Sampling measure
மாதிரிக் கூறின் பரவல் — Sampling distribution
மாதிரி முறை — Sampling method
மாறுபாடு — Variation
மாறுபாட்டுக் கெழு — Coefficient of variation
மாறி — Variable
மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் — Regression lines of the variables
மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகள் — Normal equations of the variables
மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு — Correlation coefficient of the variables
மாறிகளின் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு — Correlation analysis of variables
முகடு — Mode
முதனிலை விவரங்கள் — Primary data
முயற்சி — Effort
முரணை — Nonresponse
முழுக்கணிப்பு முறை — Census method

...MARA PUBLIC L...

முழுமைத் தொகுதி	— Population
முழு விற்பனைக் குறியீட்டெண்	— Wholesale Index number
முறையற்ற போக்கு	— Irregular trend
முறையுடை மாதிரி முறை	— Regular sampling method
முன்னோடி அளவெடுப்பு	— Pilot survey
முன்னணி விசாரணை	— Pilot enquiry
மூவழிப் பாகுபாடு	— Tripple classification
மேலின ஓகைவ்	— Greater than ogive
மேல் கால்மானம்	— Upper quartile
மேலினத் திரள் அலைவெண்	— Cumulative frequency of the greater than type
மேல் நம்பிக்கை எல்லை	— Upper confidence limit
மைய நிலைப் போக்கு	— Central tendency
மைய நிலைப்போக்கு அளவைகள்	— Measures of central tendency
மொத்தம்	— Total or aggregate
மொத்தக் குறியீட்டெண்	— Aggregate Index number
மொத்த விலக்கம்	— Total deviation

ர

ராண்டம் எண்கள்	— Random numbers
ராண்டம் ஏற்ற இறக்கம்	— Random fluctuations
ராண்டம் தேர்வுப் பொறி முறைகள்	— Techniques of random sampling
ராண்டம் மாதிரி முறை	— Random sampling method

ல

லாக்ரித்த்மிக்க் தாள்	— Logarithmic graph
லாரென்ஸின் வளைகோடு	— Lorenz curve

வ

வட்ட விளக்கப்படம்	— Pie diagram or circle diagram
வடிவம்	— Garph
வரம்பு	— Boundary
வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி	— Infinite population
வரம்புற்ற முழுமைத் தொகுதி	— Finite population
வரிசைகள்	— Series or ranges or ranks
வரிசைத் தொடர்பு	— Rank correlation
வர்க்கமூல வர்க்க சராசரி	— Root mean square deviation

வளைகோடு	— Curve
வளைகோட்டுப் பொருத்துதல்	— Curve fittings
வளைகோட்டு மாறிகள் தொடர்பு	— Curvilinear correlation of variables
வாய்ப்பு	— Chance
வாய்ப்பு நியதி	— Law of chance
வாழ்க்கைத் தரம்	— Standard of life
விகிதங்கள்	— Ratios
விசாரணைகள்	— Inquires
விரிந்த மாதிரிகள்	— Large samples
விரிந்த மாதிரி விசாரணைகள்	— Large sample enquiries
விலக்கம்	— Deviation
விலைச் சார்பிக் குறியீட்டெண்கள்	— Index of Price relatives
விவரங்கள்	— Data
விழுமிய	— Ideal
விளக்க அளவைகள்	— Descriptive measures
விளக்கப்படம்	— Diagram
வினாத் தொகுதி	— Questionnaire
வினாப் பட்டியல்	— Schedule
வெறும் விலக்கம்	— Absolute deviation
வேளாண்மைப் புள்ளி விவரம்	— Agricultural statistics

ஹ

ஹார்மானிக் சராசரி	— Harmonic mean
ஹார்மானிக் தொடர்	— Harmonic series